



*Российская Академия Наук*

# **А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА**

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

**10**

октябрь

Москва

**2024**

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Галяев А.А.

**Заместители главного редактора:**

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

**Ответственный секретарь:**

Родионов И.В.

**Редакционный совет:**

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,  
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,  
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишнеvский В.М.,  
Воронцов К.В., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И.,  
Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г.,  
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),  
Миллер Б.М., Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В.,  
Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В.,  
Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В.,  
Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Цыбаков А.Б. (Франция),  
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

**ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО К СПЕЦИАЛЬНОМУ ВЫПУСКУ  
ПО МАТЕРИАЛАМ XVI МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
«УПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЕМ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ»**

**DOI:** 10.31857/S0005231024100014, **EDN:** YVPPEO

В этом специальном выпуске представлены избранные доклады XVI Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD 2023)», состоявшейся 26–28 сентября 2023 г. в Москве.

С 26 по 28 сентября 2023 г. прошла XVI Международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD)». Это ежегодное мероприятие, организуемое Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН). В Трудах MLSD'2023 опубликовано 20 пленарных и 224 секционных доклада, индексируемых в Российском индексе научного цитирования. При технической поддержке IEEE Russia Section 177 докладов размещены в электронной библиотеке IEEE Xplore и проиндексированы Scopus. Кроме того, по регламенту публикаций материалов конференции подготовлен специальный выпуск журнала «Автоматика и телемеханика», в который включено девять статей, отражающих наиболее актуальные направления развития науки об управлении.

Как показывает анализ, среди них шесть работ вносят существенный вклад в реализацию концепций «Умной энергетики», «Умного месторождения», «Умного предприятия», «Умного транспорта», «Умной армии».

Актуальной проблемой «Умной энергетики» является непрерывный контроль технико-экономического состояния оборудования, в том числе регулирование частоты и напряжения источников энергии. К числу эффективных подходов к решению этой проблемы относится аппарат грамианных матричных структур и технологий наблюдения и контроля.

В данный выпуск включены две работы, представляющие новейшие результаты в этой области.

В работе Ядыкина И.Б. «Спектральные разложения обратных матриц грамианов и энергетических метрик непрерывных динамических систем» представлены новые спектральные разложения грамианов в форме произведений Адамара для решений алгебраических и дифференциальных уравнений Ляпунова линейных стационарных многосвязных систем с многими входами и многими выходами систем.

Работа Ядыкина И.Б., Галяева И.А. «Структурные спектральные методы решения непрерывного обобщенного управления Ляпунова» является продол-

жением публикаций авторов, посвященных этой тематике. Основным результатом является новый метод спектрального разложения матричных рядов Вольтерра с целью вычисления функционалов грамиана и энергии билинейной системы вычисление  $H_2$ -нормы для билинейной системы.

На фоне огромных успехов в практической реализации концепции «Умного месторождения» остается еще много проблем цифрового моделирования, требующих решения. Одна из них связана с моделированием технологий доизвлечения подвижной нефти из «трудноизвлекаемых» запасов углеводородов, находящихся в сложных геологофизических условиях. Этой тематике посвящена работа Ахметзянова А.В. и Самохина А.В. «Волновые и физико-химические методы управления разработкой нефтяных месторождений с аномальными запасами». Предлагаемый подход основан на понятийном базисе теории периодических волн в вязкой среде. Авторы обосновывают адекватность цилиндрических акустических волновых воздействий на природные залежи, обеспечивающие увеличение коэффициента нефтеотдачи на 10–15%.

Новые принципы поддержки функционирования и управления рисками крупномасштабных систем связаны с концепцией казуального искусственного интеллекта (Causal AI). Одним из вариантов ее реализации служит аппарат гибридной системной динамики, предоставляющий онтологическую модель инфраструктуры больших данных для сопровождения по этапам жизненного цикла поисковых причинно-следственных нейронных сетей. Основу аппарата составляет принятие решения в тех случаях и ситуациях, когда необходимо понимание глубинных причин, лежащих в основе результата. Использованию этого подхода посвящены две статьи, ориентированные на проекты «Умное предприятие» и «Умный транспорт».

В статье Цвиркуна А.Д., Резчикова А.Ф., Дранко О.И. и др. «Оптимизационно-имитационный подход к определению критических комбинаций параметров компаний» предложен метод анализа и прогнозирования рисков, ориентированный на оценку устойчивости бизнеса к разным вызовам. Практически метод реализует режим «фабрики данных» (data fabric), которая непрерывно выявляет и соединяет информацию из разрозненных приложений, чтобы обнаружить уникальные, важные для управления взаимосвязи. Такой подход позволяет запускать разнообразные приложения, в том числе для определения ключевых рисков, отладки стратегий реагирования, тестирования бизнес-модели, управления снижением финансовых рисков.

Современный этап реализации концепции «Умный транспорт» можно охарактеризовать как завершение первого этапа, связанного с созданием и внедрением информационных, коммуникационных и управленческих технологий, встроенных в транспортное средство или дорожную инфраструктуру. На сегодняшний день упор делается на контроль факторов влияния на риски дорожно-транспортных происшествий, уникальных для каждого конкретного участка и района дорожного хозяйства. Решению этой проблемы посвящена статья Цвиркуна А.Д., Богомолова А.С., Дранко О.И. и др. «Модели систем-

ной динамики для управления дорожно-транспортной системой мегаполиса». Предлагаемая модель позволяет оценивать адекватность тех или иных управленческих действий.

Для реализации концепции «Умная армия» чрезвычайно важны технологии принятия решения, основанные на использовании модели Ланчестера–Осипова, которая описывает динамику истощения численности воюющих сторон в зависимости от их показателей эффективности ведения боевых действий. Эта модель имеет различные модификации в зависимости от типа боевых действий. Ее дальнейшему развитию посвящена работа Ларюшина И.Д., Колточенко Я.А. «Расширенная модель Ланчестера–Осипова для учета боевых единиц с однократным действием в стратегических компьютерных играх» (статья в № 11, 2024).

В данный выпуск включены также работы, которые развивают оригинальные подходы к методологическому и инструментальному обеспечению модельноориентированных сценариев цифрового управления крупномасштабными научными исследованиями, производственными и организационными процессами.

Статья Горелова М.А., Ерешко Ф.И. «Иерархические игры и вычислительные процедуры в линейном случае» продолжает цикл авторских работ, которые развивают современную математическую теорию исследования операций в цифровой экономике. Статья связана с организационными системами, имеющими веерную структуру, охватывающими большое количество активных участников, характеризующимися внутренней динамикой и разнообразием форм взаимодействия игроков. Иерархические игры еще называют моделью неравноправных участников, например, государства и гражданина или главы фирмы и ее работника.

Суть метода иерархических игр заключается в моделировании взаимодействий между игроками, распределенными по слоям, где каждый слой получает данные от предыдущего и предоставляет свои решения следующему слою.

Применение метода иерархических игр в цифровой экономике и управлении развитием крупномасштабных систем обеспечивает единообразную формализацию постановки разнообразных задач. Примерами может служить поиск решений весовых коэффициентов в задачах глубокого обучения или стратегического планирования, выявление предельных возможностей целенаправленного влияния на стратегическое развитие и др.

Статья Хоботова Е.Н. «Модели выбора оборудования для модернизации предприятий с конвейерной сборкой изделий» касается цифровизации рутинного процесса поддержки переналадки поточной организации производства. Предложенный автором набор моделей составления агрегированных расписаний представляет собой перспективный образец базовых компонент инфраструктуры данных для разработки интеллектуальных систем, которые могут самостоятельно принимать решения, обучаться и оптимизировать свою работу в реальном времени.

Статья Батова А.В., Сальникова А.М., Степановой И.Э., Гудковой Т.В. «О выборках данных спутниковых измерений для построения глобальной модели магнитного поля Марса» является продолжением серии высококлассных разработок по моделированию напряженного состояния недр Марса. Актуальность этого научного направления трудно переоценить. Его результаты важны для решения фундаментальных задач планетарной геофизики, для получения детальной картины распределения негидростатических напряжений в недрах Марса, для дальнейшего цифрового исследования внутреннего строения Марса.

Председатель Программного комитета конференции  
*Васильев С.Н.*, академик РАН,  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН)  
snv@ipu.ru

© 2024 г. И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru),

И.А. ГАЛЯЕВ (ivan.galyaev@yandex.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СТРУКТУРНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

Для билинейных многосвязных непрерывных стационарных устойчивых систем с простым спектром разработаны методы и алгоритмы получения аналитических формул спектральных разложений грамианов. Найдена гарантированная ограниченная область распространения методов решения и анализа линейных систем управления на класс билинейных систем. Разработаны новые достаточные условия ВИВО устойчивости билинейных систем. Полученные спектральные разложения решений по спектру матрицы динамики линейной части, а также спектру и вычетам изображений воздействий позволяют оценить их влияние на устойчивость и динамические характеристики билинейной системы.

*Ключевые слова:* спектральные разложения грамианов, преобразование Лапласа, обратное преобразование Лапласа, обобщенное уравнение Ляпунова,  $H_2$ -норма, грамиан управляемости.

DOI: 10.31857/S0005231024100025, EDN: YVOWDM

### 1. Введение

Поддержка бесперебойной, стабильной работы энергосистемы является одной из важнейших задач электроэнергетики. Потеря устойчивости энергосистемы приводит к провалу напряжения и отключению электричества у потребителей энергии. В качестве одного из подходов для описания процессов функционирования реальной энергосистемы является создание упрощенной физической модели, состоящей из большого числа колебательных систем, представляющих собой упруго связанные группы генераторов. Как правило, колебательные подсистемы имеют различные резонансные частоты. В случае возникновения резонанса определенных подсистем или отключения генераторов, неустойчивые колебательные подсистемы начинают взаимодействовать, что приводит к развитию неустойчивых процессов во всей энергосистеме.

Одним из эффективных методов анализа статической устойчивости энергосистем является метод грамианов. Анализ грамиана управляемости линейной модели энергосистемы дает информацию о распределении мощности по электрической сети, о влиянии отдельных групп генераторов и потребителей на пропускную способность того или иного участка сети [1]. Оценка предельных границ устойчивости основана на оценке энергии, накопленной в группе слабоустойчивых режимов. Из физических соображений становится ясно, что

рост этой энергии означает приближение энергосистемы к границе устойчивости. Если известна передаточная функция ее линейной модели, то энергия колебаний может быть оценена по квадрату  $H_2$ -нормы передаточной функции, которая может быть вычислена путем решения уравнений Ляпунова и вычисления энергетических функционалов [2–4]. Блэкаут является примером тяжелой системной аварии в энергосистеме, степень угрозы которой можно вычислить с помощью метода грамианов. Однако он основан на использовании линеаризованной модели и не позволяет анализировать устойчивость при коротких замыканиях на линиях, что требует учета факторов нелинейностей модели.

Выбор билинейной модели энергосистемы позволяет учесть нелинейности взаимодействий. Для такой модели вычисление  $H_2$ -нормы оператора основано на разложении резольвенты матрицы динамики линейной системы на простые дроби в комплексной области. Также существуют итерационные алгоритмы вычисления квадрата  $H_2$ -нормы грамианов управляемости. Билинейные модели энергосистем используются для анализа статической устойчивости энергосистем [1, 5]. Для решения задачи анализа устойчивости [6, 7] используется многомерное преобразование Лапласа. Первые попытки альтернативного решения посредством метода грамианов для нелинейных моделей динамических систем были связаны с научным направлением понижения размерности, а также вычислением кинетической и накопленной энергий. В [8] был впервые разработан итеративный метод для вычисления квадрата  $H_2$ -нормы для оператора билинейной системы. В работах [9–12] для синтеза нелинейных систем управления использовались функциональные ряды Вольтерра и многомерные передаточные функции. Метод грамианов используется для вычисления спектральных разложений грамианов управляемости, наблюдаемости и кросс-грамианов по матрицам решений уравнений Ляпунова и Сильвестра для непрерывных и дискретных систем с простым и кратным спектрами. В работе [13] предложен метод грамианов для расчета виртуальных энергетических балансов, основанный на спектральном разложении квадрата  $H_2$ -нормы для передаточной функции системы. Определены энергетические показатели для аномалий энергетического баланса и получены их выражения в терминах квадратичных комплекснозначных форм. Сравнение абсолютных значений этих форм позволяет выявить аномалии баланса и, что не менее важно, указать на конкретные устройства, вызывающие аномалии. Для задач мониторинга устойчивости электроэнергетических систем эти аномалии определяют тяжесть угрозы неустойчивости и направление развития возможной каскадной аварии. Для задач технической диагностики они определяют возможные деградационные отказы технических устройств [14].

Основной вклад работы можно определить как новый метод спектрального разложения матричных рядов Вольтерра с целью вычисления функционалов грамиана и энергии билинейной системы вычисление  $H_2$ -нормы для билинейной системы, основанный на разложении резольвенты матрицы динамики линейной системы на простые дроби в комплексной области. Кроме

того, разработаны итерационные алгоритмы вычисления квадрата  $H_2$ -нормы грамианов управляемости для непрерывной билинейной системы, основанные на использовании прямого и обратного преобразования Лапласа на каждом шаге итераций.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается устойчивая непрерывная стационарная билинейная динамическая ММО система [19]

$$(2.1) \quad \Sigma_2: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{\gamma=1}^m N_\gamma x(t) u_\gamma(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

где  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$ ,  $y(t) \in R^m$ ,  $u_\gamma(t)$  –  $\gamma$ -я компонента  $u(t)$ .

Для системы (2.1) определена линейная часть

$$(2.2) \quad \Sigma_1: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Посредством матричного ряда Вольтерра задается выражение для грамиана управляемости билинейной системы [1]

$$(2.3) \quad \begin{aligned} P_1(t_1) &= e^{At_1} B, \\ P_i(t_1, \dots, t_i) &= e^{At_i} [N_1 P_{i-1} N_2 P_{i-1} \dots N_m P_{i-1}], \quad i = 2, 3, \dots, \\ P &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} P_i(t_1, \dots, t_i) P_i^T(t_1, \dots, t_i) dt_1 \dots dt_i. \end{aligned}$$

Для системы (2.1) известно два представления обобщенного уравнения Ляпунова (ОУЛ) через грамиан управляемости и наблюдаемости соответственно

$$(2.4) \quad AP + PA^T + \sum_{\gamma=1}^m N_\gamma P N_\gamma^T = -BB^T,$$

$$(2.5) \quad A^T Q + QA + \sum_{\gamma=1}^m N_\gamma Q N_\gamma^T = -C^T C.$$

*Лемма 1 [1]. Рассмотрим последовательность векторов  $\{x_i(t)\}$  решений дифференциальных уравнений системы (2.1), в которой вектор управления задан на пространстве непрерывных вещественных векторов  $U^m(I)$  на конечном интервале  $I = (0, T)$  с теми же начальными условиями, что и*

для линейной системы (2.2)

$$(2.6) \quad \dot{x}_0 = Ax_0 + Bu,$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= Ax_i + \sum_{\gamma=1}^m N_\gamma x_{i-1} u_\gamma + Bu, \quad i = 1, 2, \dots, \\ x_i(0) &= x(0), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда для каждого вектора  $u(t) \in U^p(I)$  последовательность векторов  $\{x_i(t)\}$  решений систем (2.6)–(2.7) сходится равномерно на  $I$  к решению би-линейной системы (2.1) –  $\{x(t)\}$ .

Введем вектор невязки  $z_i(t) = x(t) - x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Тогда справедливы равенства

$$(2.8) \quad z_i(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \sum_{\gamma=1}^m N_\gamma z_{i-1}(\tau) u_\gamma(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots$$

Положим нулевые начальные условия

$$x_i(0) = x(0) = 0, \quad z_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

В этом случае решение системы дифференциальных уравнений (2.6) примет вид

$$(2.9) \quad x_0(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

*Теорема 1 [24]. Ряд Вольтерра (2.3) сходится на временном интервале  $[0, \inf)$  для любого ограниченного входного сигнала, если выполняются следующие два условия:*

1. Матрица  $A$  устойчива, т.е.  $\Lambda(A) \subset C^-$ .

2. Матрицы  $N_\gamma$  достаточно ограничены, т.е.  $\sum_{\gamma=1}^m \|N_\gamma\| < \frac{\mu}{cM}$ , где две константы  $\mu > 0$  и  $c > 0$  такие, что

$$\|e^{At}\|_2 \leq ce^{-\mu t/2}, \quad t \geq 0.$$

В настоящей работе предлагается новый комплексный подход к построению решений  $z_i(t)$  с целью разработать новые итеративные алгоритмы решений и конструктивные проверяемые критерии сходимости решений на полуинтервале  $[0, \infty)$ . Для решения поставленной задачи предлагается новая методология построения решения:

1. На первой итерации выполнять EVD декомпозицию матрицы динамики линейной части.

2. Вычислять решение для элементов вектора на каждом шаге во временной и частотной области с помощью прямого и обратного преобразования Лапласа на основе декомпозиции по спектру и агрегирования элементов вектора.

3. Формировать функциональные последовательности элементов вектора состояния билинейной системы и строить интегральные неравенства для построения их мажорант.

4. Получить критерии сходимости элементов решений на полуинтервале  $[0, \infty)$  и на их основе выполнить анализ ВВО устойчивости билинейной системы.

### 3. Основные результаты

В такой постановке примем, что матрица  $A$  устойчива и имеет простой спектр,  $m = 1$ , а функция  $u(t)$  ограничена на полуинтервале  $[0, \infty)$

$$(3.1) \quad \int_0^{\infty} |u(\tau)| d\tau \leq M > 0.$$

Если все собственные числа  $s_r$  матрицы  $A$  различны, то существует невырожденное преобразование координат

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x &= T x_d, \quad z = T z_d, \quad \dot{z} x_d = A_d z x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d, \\ A_d &= T^{-1} A T, \quad B_d = T^{-1} B, \quad C_d = C T, \quad Q_d = T^{-1} B B^T T^{-T}, \end{aligned}$$

или

$$A_d = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{bmatrix}; \quad TV = VT = I.$$

Где матрица  $T$  составлена из левых собственных векторов  $u_i$ , а матрица  $T^{-1} = V$  – из правых собственных векторов  $\nu_i^*$ , соответствующих собственному числу  $s_i$ .

Рассмотрим процесс последовательного построения решений  $z_d(t)$ .

Первый шаг. Во временной области решение определяется уравнением (2.9). Для элемента « $\varphi$ » диагонализированной системы это уравнение имеет вид

$$z_{d\varphi}^{(1)}(t) = \int_0^t e^{s_\varphi(t-\tau)} b_\varphi u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, \infty),$$

откуда с учетом условия  $s_\varphi \in \mathbb{C}^-$  следует неравенство

$$\left| z_{d\varphi}^{(1)}(t) \right| \leq \max_{\varphi} |b_\varphi| M, \quad \varphi = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, \infty).$$

Поскольку из (3.1) вытекает существование изображения  $u(s)$ , в частотной области точное решение имеет вид

$$z_{d\varphi}^{(1)}(s) = (s - s_\varphi)^{-1} b_\varphi u(s).$$

Второй шаг. В соответствии с (2.8) решение во временной области имеет вид

$$(3.3) \quad z_{d\varphi}^{(2)}(t) = \int_0^t e^{s_\varphi(t-\tau)} N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau) u(\tau) d\tau, \quad \varphi = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, \infty).$$

Изображение интеграла свертки (3.3) имеет форму

$$z_{d\varphi}^{(2)}(s) = (s - s_\varphi)^{-1} \mathcal{L} \left[ N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau) u(\tau) \right].$$

Поскольку все собственные числа  $s_\varphi$  находятся в левой полуплоскости, справедливы неравенства

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & \left| e^{s_\varphi(t-\tau)} \right| < 1, \quad \tau \in [0, \infty), \\ & \left| z_{d\varphi}^{(2)}(t) \right| \leq \int_0^t |N b_\varphi u^2(\tau)| d\tau, \quad \varphi = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

При выполнении условия (3.1) функция  $u(t)$  преобразуема по Лапласу. Предположим, что ее изображение  $u(s)$  является рациональной алгебраической дробью, имеющей « $l$ » простых полюсов

$$u(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{\prod_{k=1}^l (s - s_k)}.$$

Разложение этой функции на простые дроби с комплексными коэффициентами имеет форму

$$u(s) = \sum_{k=1}^l R_k^u (s - s_k)^{-1}, \quad R_k^u = \frac{A(s_k)}{B'(s_k)},$$

где  $R_k^u$  – вычет функции  $u(s)$  в ее полюсе. На основании теоремы о перемножении двух функций во временной области имеем

$$(3.5) \quad \mathcal{L} \left[ e_i^T N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau) u(\tau) \right] = \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u u(s - s_k),$$

$$(3.6) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L} \left[ e_i^T N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau) u(\tau) \right] \right\} = \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u u(t) e^{s_k t}.$$

Из (3.6) с учетом устойчивости линейной части билинейной системы следует неравенство

$$\left| \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L} \left[ e_i^T N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau) u(\tau) \right] \right\} \right| \leq \left| \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{i\varphi} b_{\varphi} R_k^u \right| |u(t)|, \quad \forall \varphi, i; \quad \forall t \in [0, \infty).$$

С учетом последнего неравенства можно записать неравенство (3.4) в виде

$$(3.7) \quad \left| z_{di}^{(2)}(t) \right| \leq \left| \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{i\varphi} b_{\varphi} R_k^u \right| \int_0^t |u(\tau)| d\tau, \quad \forall \varphi, i = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, \infty).$$

Третий шаг. В соответствии с общей формулой решение во временной области имеет вид

$$(3.8) \quad z_{d\varphi}^{(3)}(t) = \int_0^t e^{s_{\varphi}(t-\tau)} N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau) u(\tau) d\tau, \quad \forall \varphi, \varphi = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, \infty).$$

Изображение интеграла свертки (3.8) принимает форму

$$z_{d\varphi}^{(3)}(s) = (s - s_{\varphi})^{-1} \mathcal{L} \left[ N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau) u(\tau) \right].$$

Поскольку все собственные числа  $s_{\varphi}$  находятся в левой полуплоскости, справедливы неравенства

$$(3.9) \quad \left| e^{s_{\varphi}(t-\tau)} \right| < 1, \quad \forall t, \tau \in [0, \infty),$$

$$\left| z_{d\varphi}^{(3)}(t) \right| \leq \int_0^t |N b_{\varphi} u^2(\tau)| d\tau, \quad \forall \varphi, \varphi = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, \infty).$$

На основании теоремы о перемножении двух функций во временной области имеем

$$(3.10) \quad \mathcal{L} \left[ e_i^T N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau) u(\tau) \right] = \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{i\varphi} b_{\varphi} R_k^u u(s - s_k),$$

$$(3.11) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L} \left[ e_i^T N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau) u(\tau) \right] \right\} = \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{i\varphi} b_{\varphi} R_k^u u(t) e^{s_k t}.$$

Из (3.11) с учетом устойчивости линейной части билинейной системы следует неравенство

$$\left| \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L} \left[ e_i^T N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau) u(\tau) \right] \right\} \right| \leq \left| \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{i\varphi} b_{\varphi} R_k^u \right| |u(t)|, \quad \forall \varphi, i; \quad \forall t \in [0, \infty).$$

С учетом последнего неравенства можно записать неравенство (3.9) в виде

$$(3.12) \quad \left| z_{d\rho}^{(3)}(t) \right| \leq \left| \sum_{\psi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{\psi\varphi} R_k^u \right| \left| \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{\psi\varphi} b_{\varphi} R_k^u \right| M, \\ \forall \varphi, i = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, \infty),$$

или

$$\left| z_{d\rho}^{(3)}(t) \right| \leq nl \max_{\psi, \varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| \left| z_{d\rho}^{(2)}(t) \right|, \quad t \in [0, \infty).$$

Докажем, что на всех последующих шагах  $j = 4, 5, \dots$  справедливы рекуррентные неравенства

$$(3.13) \quad \left| z_{d\rho}^{(j)}(t) \right| \leq nl \max_{\psi, \varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| \left| z_{d\rho}^{(j-1)}(t) \right|, \quad t \in [0, \infty).$$

Применим метод математической индукции. Неравенство справедливо при  $j = 3$ .

Предположим, что оно справедливо для шага  $j - 1$

$$(3.14) \quad \left| z_{d\rho}^{(j-1)}(t) \right| \leq nl \max_{\psi, \varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| \left| z_{d\rho}^{(j-2)}(t) \right|, \quad t \in [0, \infty), \\ \left| z_{d\rho}^{(j-2)}(t) \right| \leq \left\{ nl \max_{\psi, \varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| \right\}^{j-3} \left| \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{i\varphi} b_{\varphi} R_k^u \right| M.$$

В соответствии с общим алгоритмом (2.5) имеем

$$(3.15) \quad z_{d\rho}^{(j)}(t) = \int_0^t e^{s_{\rho}(t-\tau)} N z_{d\rho}^{(j-1)}(\tau) u(\tau) d\tau, \quad \forall \varphi, \varphi = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, \infty).$$

В силу предположения об устойчивости линейной части справедливо неравенство

$$(3.16) \quad \left| z_{d\rho}^{(j)}(t) \right| \leq \left| \int_0^t N z_d^{(j-1)}(\tau) u(\tau) d\tau \right|, \quad \forall \varphi, \varphi = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, \infty).$$

С другой стороны справедлива оценка

$$(3.17) \quad \left| \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L} \left[ e_{\rho}^T N z_d^{(j-1)}(\tau) u(\tau) \right] \right\} \right| \leq \\ \leq \left| \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{i\varphi} R_k^u z_d^{(j-1)} u(t) \right|, \quad \forall \varphi, i; \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Подставим в неравенство (3.16) неравенства (3.13) и (3.14) и учтем неравенство (3.17). Таким образом мажоранта для функциональной последовательности  $\{z_{d\rho}^{(j)}(t)\}$ ,  $j = 2, 3, \dots, \infty$  имеет вид

$$\left| z_{d\rho}^{(j)}(t) \right| \leq \left\{ nl \max_{\psi, \varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| \right\}^{j-1} \left| \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{i\varphi} b_{\varphi} R_k^u \right| M, \quad t \in [0, \infty).$$

#### 4. Критерий ВІВО устойчивости билинейной системы

Построим для последовательности  $z_d^j$  мажоранту в виде геометрической прогрессии.

Первый член прогрессии

$$m_1 = \max_{\varphi} |b_{\varphi}| M.$$

Член прогрессии с номером “ $j$ ”

$$m_j = \max_{\varphi} |b_{\varphi}| M q^{j-1},$$

где  $q$  – знаменатель прогрессии

$$q = nl \max_{\psi, \varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u|.$$

Достаточное условие сходимости прогрессии

$$(4.1) \quad nl \max_{\psi, \varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| < 1.$$

Достаточное условие расходимости прогрессии

$$(4.2) \quad \exists n, l, \phi, \psi, k : nl \max_{\psi, \varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| > 1.$$

Условие (4.1) гарантирует сходимость всех числовых последовательностей элементов матриц решения обобщенного уравнения Ляпунова на каждом шаге в процессе итераций. Это означает, что при выполнении условия ограниченности числа  $M$  и достаточного условия сходимости прогрессии ограниченный вход обеспечивает ограниченный выход, что означает ВІВО устойчивость билинейной системы. Аналогичное условие (4.2) означает, что найдется хотя бы одна расходящаяся прогрессия на рассматриваемом конечном интервале, которая позволяет построить итеративный процесс вычисления неограниченного решения. Выполнение условия (4.2) приводит к ВІВО неустойчивости билинейной системы. В соответствии с признаком Вейерштрасса последовательности частичных сумм  $m_j$  сходятся равномерно и абсолютно. Заметим, что полученные условия ВІВО устойчивости билинейной системы в отличие от достаточного критерия позволяют анализировать зависимость условия

ВВО устойчивости билинейной системы не только от амплитуды входного воздействия, но и от его спектра. В частности, эти условия включают оценки модулей вычетов изображения функции входа в полюсах характеристического уравнения изображения.

*Теорема 2. Пусть дана непрерывная билинейная система (2.1) с многими входами и многими выходами, вещественными матрицами  $A, B, N$  и линейной частью (2.2), определенной на числовой оси  $t \in [0, \infty)$ , гурвицевой матрицей  $A$  с простым спектром. Функции  $u_\gamma(t)$  ограничены на интервале  $[0, \infty)$  и выполнены неравенства*

$$\int_0^\infty |u_\gamma(\tau)| d\tau \leq M_\gamma > 0, \quad \gamma = 1, 2, \dots, m.$$

*Также дана итеративная процедура построения решения системы (2.1) вида (2.6)–(2.7) с нулевыми начальными условиями. И невырожденное преобразование координат системы с матрицей  $T$  (3.2).*

*Тогда на каждом шаге итерации справедливы спектральные разложения ядер Вольтерра решения исходной и преобразованной систем во временной и частотной области вида*

$$z_{d\varphi}^{(j)}(s) = (s - s_\varphi)^{-1} \mathcal{L} \left[ N z_{d\varphi}^{(j-1)}(\tau) u(\tau) \right],$$

$$\left| z_{d\varphi}^{(j)}(t) \right| \leq \left\{ nl \max_{\psi, \varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| \right\}^{j-1} \left| \sum_{\varphi=1}^n \sum_{k=1}^l n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u \right| M, \quad t \in [0, \infty).$$

*При выполнении условия (4.1) функциональные ряды сходятся к решению абсолютно и равномерно.*

## 5. Заключение

В работе предложены новые алгоритмы и методология построения спектрального итеративного решения непрерывного билинейного уравнения, являющихся развитием подхода, предложенного в работе [24]. По сравнению с этими работами предложенный подход обладает следующими преимуществами:

1. Полученные критерии сходимости числовых последовательностей элементов решения билинейного уравнения во временной и частотной области определяют гарантированную ограниченную область распространения методов решения и анализа линейных систем управления на класс билинейных систем для многих приложений.

2. Получены новые достаточные условия ВВО устойчивости билинейных систем и предложен новый метод вычисления установившихся значений их решений.

3. Для построения и исследования решения вместо многомерного преобразования Лапласа предложено использовать частотные методы, основанные на прямом преобразовании Лапласа.

4. Полученные спектральные разложения решений по спектру матрицы динамики линейной части, а также спектру и вычetaм изображений воздействий, позволяют оценить их влияние на устойчивость и динамические характеристики билинейной системы.

5. Для частного случая уравнений ММО ВТИ непрерывных систем с воздействиями, изображения которых являются дробно-рациональными функциями, сходящимися на конечном интервале, получены аналитические формулы итеративного построения решений.

Следует отметить ограничения предложенного подхода:

1. Линейная часть билинейной системы должна быть устойчивой, а ее матрица динамики иметь простой спектр.

2. Исследование ограничено детерминированными воздействиями.

3. Полюса изображений воздействий должны находиться в левой полуплоскости комплексной плоскости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Al-Baiyat S., Farag A., Bettayeb M.* Transient approximation of a bilinear two-area interconnected power system // *Electric Power Syst. Res.* 1993. V. 26. No. 1. P. 11–19.
2. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Philadelphia, 2005.
3. *Alessandro P., Isidori A., Ruberti A.* Realization and structure theory of bilinear dynamic systems // *SIAM J. Cont.* 1974. V. 12. P. 517–535.
4. *Arroyo J., Betancourt R., Messina A., Barocio E.* Development of bilinear power system representations for small signal stability analysis // *Electric Power Syst. Res.* 2007. V. 77. No. 10. P. 1239–1248.
5. *Benner P., Damm T.* Lyapunov equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // *SIAM J. Control Optim.* 2011. V. 49. P. 686–711.
6. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Учебник-М.: Изд-во Лань, 2009. 726 с.
7. *Feeny B., Liang Y.* Interpreting proper orthogonal modes of randomly excited vibration systems // *J. Sound Vib.* 2003. V. 265. No. 5. P. 953–966.
8. *Bruni C., Dipillo G., Kogh G.* On the mathematical models of bilinear systems // *Ricerche di Automatica.* 1971. V. 2. P. 11–26.
9. *Lubbock J., Bansal V.* Multidimensional Laplace transforms for solution of nonlinear equation // *Proc. IEEE.* 1969. V. 116. No. 12. P. 2075–2082.
10. *Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976. 448 с.

11. *Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д.* Техническая кибернетика. Теория автоматического управления / Анализ и синтез нелинейных систем автоматического регулирования при помощи рядов Вольтерра и ортогональных спектров. 1969. С. 223–256.
12. *Мироновский Л.А., Соловьева Т.Н.* Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // *АиТ.* 2013. № 4. С. 59–79.
13. *Zhang L., Lam J.* On  $H_2$  model order reduction of bilinear systems // *Automatica.* 2002. V. 38. P. 205–216.
14. *Odgaard P., Stoustrup J., Kinnaert M.* Fault tolerant control of wind turbines a benchmark model // *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* 2013. V. 21. No. 4. P. 1168–1182.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.*

Поступила в редакцию 25.06.2024

После доработки 15.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024

© 2024 г. М.А. ГОРЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук (griever@ccas.ru),  
Ф.И. ЕРЕШКО, д-р техн. наук (fereshko@yandex.ru)  
(Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН,  
Москва)

## ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ

Описываются предпосылки появления теории иерархических игр. Приводится описание моделей и ссылки на набор статей, дающих представление о ключевых проблемах и полученных фундаментальных результатах. Уделяется внимание практическим приложениям. Основные понятия и положения иллюстрируются решениями в случае линейных задач. В заключение отмечается необходимость последующих исследований в области вычислительных методов.

*Ключевые слова:* исследование операций, иерархические игры, практические приложения, линейные задачи, вычислительные методы.

DOI: 10.31857/S0005231024100031, EDN: YVNTSW

### 1. Введение

Дисциплина исследования операций в отечественном представлении возникла на базе разработок по эффективности различных управляемых процессов [1]. Характерной особенностью отечественных разработок явилось принципиальное насыщение постановок математическими моделями.

В настоящей работе авторы продолжают эти традиции, убеждаясь, что все новые подходы вполне удачно вписываются в конструкции исследования операций.

Принцип оптимальности, принятый в отечественной школе, опирается на идею гарантированного результата при анализе операций, содержащих неопределенности. Большое внимание уделяется порядку ходов активных участников операции, что позволило рассмотреть широкий класс задач с иерархической структурой.

Значительное продвижение достигнуто в области разработки численных методов при решении задач исследования операций, использующих методы штрафных функций.

В работе излагаются дальнейшие продвижения в упомянутых направлениях.

### 2. Иерархия. Примеры разработок

Вопросы управления и принятия решений в организационных системах с иерархической структурой обращали на себя большое внимание и имеют значительную литературу.

Остановимся, в частности, на некоторых примерах из зарубежных публикаций.

Нобелевская премия 2016 г. по экономике была присуждена Оливеру Харту (Гарвардский университет, США) и Бенгту Хольстрёму (Массачусетский технологический институт, США) за их вклад в теорию контрактов (где присутствуют ведущий и ведомый: Principal-agents), которая базируется на моделях взаимодействия иерархического характера. В официальном сообщении о присуждении премии говорится: «В современной экономике содержится неисчислимо число контрактов. Новые теоретические инструменты, созданные авторами (Hart и Holmström), ценны для понимания реальных контрактов и институтов, а также для учета возможных подводных камней в разработке контрактов. Их анализ оптимальных контрактов закладывает интеллектуальный фундамент для разработки стратегий и институтов во многих областях, от законодательства о банкротстве до политических конституций». [2] Теория контрактов стала неотъемлемой частью современной экономической теории.

В зарубежной литературе при моделировании иерархических систем чаще используют модели равновесия по Штакельбергу. Основные работы Штакельберга были изданы в Австрии в 30-х гг. прошлого века. Отмечая иерархический характер структуры экономики он писал: «...зачем нам национализировать производства, лучше нам национализировать владельцев предприятий».

Более широкую известность идеи Штакельберга получили в 50-х гг., когда его книги были переведены на английский язык [3].

Фундаментальные работы по анализу конфликтных ситуаций в иерархических системах были получены школой Гермейера Ю.Б., значительная часть суммирована в [4].

Иерархия рассматривается как естественное развитие принципов оптимальности в теории игр и естественное приложение для задач исследования операций, где рассмотрение ведется в интересах оперирующей стороны.

Постановка задачи по анализу иерархических игр привлекла значительный интерес большой группы исследователей в ВЦ ФИЦ РАН (ВЦ АН СССР) и ВМК МГУ. Проявленная активность имела результатом три монографии, несколько десятков статей в ведущих журналах, выступления на конференциях и прикладные разработки в разных сферах [5–11].

К работам школы было привлечено внимание А.Б. Рапопорта, ведущего исследователя в теории систем, бывшего приглашенным директором Institute for Advanced Studies в Вене, и А.Б. Рапопорт сделал и выпустил английский перевод [12]. В Предисловии к переводу книги А.Б. Рапопорт пишет: «За пределами Советского Союза анализ такого сорта был в основном сосредоточен на процессах установления цены, где основные структуры игры, по большей части, довольно элементарны. В работе Germeier'a и его учеников, структура, в которой происходит процесс (включающий намного больше, чем торговля), была значительно расширена и разносторонне развита. Особенно интересной темой, одной, которой советские теоретики игры уделили значительное

внимание, является тема так называемых иерархических игр, которые могут быть истолкованы как модели плановой экономики с различными степенями централизации или децентрализации”.

Представляется, что эта оценка с одной стороны позитивна, а с другой стороны сыграла отрицательную роль, поскольку сместила акценты мнений западных коллег-экономистов, слишком привязав теорию иерархических игр к образу плановой экономики, имеющей для них негативный характер. Это необоснованно, поскольку принцип гарантированного результата не исключает равновесия, что замечательно иллюстрируется на примере теоремы о существовании седловой точки в играх с противоположными интересами.

К настоящему направлению исследования операций тесно примыкает теория открытого управления, обзор которой опубликован в [13], и теория механизмов [14].

Примером приложения может служить управление в крупномасштабных проектах многоукладной экономики, где необходимо полноценное информационное обеспечение для принятия стратегических решений [15, 16].

В настоящее время эти тенденции обретают конкретные организационные формы: “Значительные продвижения в автоматизации систем поддержки принятия управленческих решений в организационных системах осуществлены в рамках Системы распределенных ситуационных центров (СРСЦ), которые рассматриваются как технологическая и аппаратно-программная основа систем поддержки принятия решений. Основная цель современных ситуационных центров – осуществить поддержку процессов принятия решений руководством на основе наглядных представлений (образов) ситуаций, возникающих в подконтрольной среде, предоставить руководству визуализацию результатов их анализа в наиболее удобной для принятия решений форме. Не только анализ, но и прогноз, тенденции развития ситуации в кратко-, средне-, долгосрочной перспективе” [17].

Впрочем, осознавались эти потребности довольно давно. 50 лет назад академик В.М. Глушков писал: “Отметим также, что в отечественных разработках прошлого, в которых были суммированы идеи управления экономическими системами к тому времени, был принципиально поставлен вопрос о новом значении информации в жизни общества и описана трехуровневая в территориальном аспекте система ЭВМ в человеко-машинном варианте, которая накапливая и обрабатывая информацию, генерировала бы проекты государственных планов и реализовывала бы функции принятия решений. Система получила название Общегосударственной автоматизированной системы управления (ОГАС)” [18].

### **3. Модели теории иерархических игр**

Появление новых информационных технологий, таких, как искусственный интеллект, заставляет по-новому взглянуть на некоторые задачи теории иерархических систем. Многие экономисты, как теоретики, так и практикующие

щие бизнесмены, обращают внимание на актуальность такого рода исследований.

Недавно установлена [19, 20] формальная аналогия между задачей поиска весов в глубоком обучении искусственных нейронных сетей и задачей анализа взаимодействия активных элементов многоуровневой иерархической системы, стремящихся к оптимизации некоего общего критерия. Вероятно, анализ этой аналогии может оказаться полезным при решении обеих задач.

В теории исследования операций [1] принимается положение, что “операция есть совокупность целенаправленных действий”. Математическая модель операции обычно включает фазовые переменные, неопределенные факторы и переменные управления, порождающие соответствующие действия.

В классических моделях теории иерархических игр [4, 8] принимаются следующие предположения:

- В системе имеется выделенный элемент (Центр), интересы которого отождествляются с интересами системы в целом.
- Центр обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает свою стратегию и этот выбор становится известным его контрагентам.
- Стратегия Центра может иметь сложную функциональную структуру, если Центр рассчитывает получить какую-то информацию о действиях партнеров.
- Предполагается, что подчиненные элементы системы действуют рационально, исходя из собственных интересов в рамках правил, определяемых Центром.
- Центр осторожен, т.е. ориентируется на наихудший для него выбор партнеров.

С теоретической точки зрения необходимо отметить, что исследование должно сочетать имитационные и оптимизационные подходы.

#### **4. Описание технологических ограничений**

В работе в качестве объекта исследования принимаются линейные модели управляемых систем. Выбор характера зависимости определяется содержательными и аналитическими возможностями, предоставляемыми фундаментальными теориями балансов Леонтьева В.В. и производственных процессов Канторовича–Купманса.

Термин “агент”, понимается в смысле определения из работы [21]: “типизированный субъект, интересы и информированность которого соответствуют исполняемой им роли в данной общественной системе разделения труда, называется агентом (agent). Заметим, что в обществе система ролей устроена так, что и согласование интересов с ролями происходит на всех уровнях иерархии, поэтому под агентом можно понимать не только физическое лицо, но и юридическое лицо – организацию”.

Рассмотрим линейную модель управления сложной производственной системой.

Будем считать, что рассматриваемая система состоит из  $n$  агентов. Прономеруем их натуральными числами от 1 до  $n$ .

Пусть в системе производится  $m$  типов продукции, а в процессе производства используется  $k$  различных типов ресурсов. Предположим, что в процессе производства одной единицы продукта типа  $j$   $i$ -й агент затрачивает ресурс вида  $l$  в количестве  $p_{lj}^i$ . В системе имеются централизованные запасы ресурса вида  $l$  в количестве  $r_l$  ( $l = 1, \dots, k$ ). Вдобавок  $i$ -й агент имеет собственный запас такого ресурса. Его объем обозначим через  $b_l^i$ .

Предполагается, что продукция вида  $j$  может быть оценена по цене  $c_j$ .

Нормативы затрат будем считать не зависящими от объема производства. В этом предположении при производстве  $x_j^i$  единиц продукции типа  $j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) агентом  $i$  затрачивается  $p_{11}^i x_1^i + p_{12}^i x_2^i + \dots + p_{1m}^i x_m^i$  единиц ресурса вида  $l$ . За всю произведенную продукцию агент  $i$  может выручить сумму  $c_1 x_1^i + c_2 x_2^i + \dots + c_m x_m^i$ .

Цены  $c_j$  будем считать положительными. Разумеется, что коэффициенты затрат  $p_{lj}^i$  неотрицательны. Никакая продукция не может быть произведена совсем без затрат. Поэтому естественно предполагать, что при всех  $i$  и всех  $j$  хотя бы один коэффициент  $p_{1j}^i, \dots, p_{kj}^i$  строго положителен. Объемы запасов  $b_l^i$  и  $r_l$  разумно считать неотрицательными.

Для сокращения формул используем матричные обозначения. Вектор выпусков  $i$ -го агента  $(x_1^i, \dots, x_m^i)^T$  будем обозначать символом  $x^i$  (верхний индекс "Т" обозначает транспонирование). Пусть  $c = (c_1, \dots, c_m)$  – вектор цен, а

$$P^i = \begin{pmatrix} p_{11}^i & p_{12}^i & \dots & p_{1m}^i \\ p_{21}^i & p_{22}^i & \dots & p_{2m}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1}^i & p_{k2}^i & \dots & p_{km}^i \end{pmatrix}$$

– матрица затрат. Тогда вектор затрат  $y^i = (y_1^i, \dots, y_k^i)^T$  удовлетворяет условию  $y^i = P^i x^i$ , а сумма, получаемая агентом  $i$  за выпущенную продукцию равна  $c x^i$ .

Для векторов запасов введем обозначения  $b^i = (b_1^i, \dots, b_k^i)^T$ ,  $r = (r_1, \dots, r_k)^T$ .

Обозначим буквой  $Y$  множество всех наборов векторов  $y^1, y^2, \dots, y^n$ , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} y^1 + \dots + y^n &\leq r, \\ y^i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

(как обычно все векторные неравенства понимаются как покомпонентные).

Как отмечалось выше, вопрос исследования иерархических систем тесно связан с вопросами централизации и децентрализации [22, 23].

В целях иллюстрации приведем ограниченное рассмотрение некоторых проблем приложения теоретического исследования экономических операций в организационных системах.

## 5. Централизованное распределение ресурсов

В данном разделе будем предполагать, что существует некий субъект (Центр), который управляет деятельностью всех агентов. А именно, Центр определяет объемы централизованных ресурсов  $y^i$ , выделяемых каждому из агентов, и их объемы выпусков  $x^i$ . Целью управления будем считать максимизацию суммарного дохода всех агентов.

Предположим, что параметры системы, относящиеся к отдельным агентам, известны Центру неточно. Такую ситуацию можно моделировать различными способами. В данном случае будем использовать “интервальный” способ. Будем считать, что Центру неизвестны точно нормы затрат  $p_{lj}^i$  и “собственные” запасы агентов, а известно лишь, что  $p_{lj}^{i-} \leq p_{lj}^i \leq p_{lj}^{i+}$  и  $b_l^{i-} \leq b_l^i \leq b_l^{i+}$ .

Определив матрицы

$$P^{i-} = \begin{pmatrix} p_{11}^{i-} & p_{12}^{i-} & \cdots & p_{1m}^{i-} \\ p_{21}^{i-} & p_{22}^{i-} & \cdots & p_{2m}^{i-} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1}^{i-} & p_{k2}^{i-} & \cdots & p_{km}^{i-} \end{pmatrix}, \quad P^{i+} = \begin{pmatrix} p_{11}^{i+} & p_{12}^{i+} & \cdots & p_{1m}^{i+} \\ p_{21}^{i+} & p_{22}^{i+} & \cdots & p_{2m}^{i+} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1}^{i+} & p_{k2}^{i+} & \cdots & p_{km}^{i+} \end{pmatrix},$$

и векторы

$$b^{i-} = (b_1^{i-}, \dots, b_k^{i-})^T, \quad b^{i+} = (b_1^{i+}, \dots, b_k^{i+})^T,$$

эти условия можно более компактно записать в виде  $P^{i-} \leq P^i \leq P^{i+}$  и  $b^{i-} \leq b^i \leq b^{i+}$ . Разумеется, предполагается что матрицы  $P^{i-}, P^{i+}$  и векторы  $b^{i-}, b^{i+}$  Центру известны.

Естественно предполагать, что Центр не может нарушать законов сохранения “физических” величин, поэтому свои управления он должен выбирать так, чтобы у каждого агента хватило ресурсов на его собственную производственную программу при любых значениях неопределенных параметров (из заданных интервалов).

Таким образом, получаем не совсем обычную задачу оптимизации:

$$cx^1 + cx^2 + \dots + cx^n \rightarrow \max,$$

при ограничениях

$$P^i x^i \leq b^i + y^i, \quad i = 1, \dots, n, \\ y^1 + y^2 + \dots + y^n \leq r, \quad x^i \geq 0, \quad y^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ее необычность заключается в том, что ограничения  $P^i x^i \leq b^i + y^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , должны выполняться при любых  $P^{i-} \leq P^i \leq P^{i+}$  и  $b^{i-} \leq b^i \leq b^{i+}$ . Таким образом, формально получается задача с бесконечным числом ограничений. Однако эта проблема решается легко.

Действительно, если выполнены неравенства  $P^{i+} x^i \leq b^{i-} + y^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то неравенства  $P^i x^i \leq b^i + y^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  будут выполнены при всех  $P^i \leq P^{i+}$

и  $b^{i-} \leq b^i$ . Разумеется, условие  $P^{i+}x^i \leq b^{i-} + y^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  является и необходимым.

Значит, поставленная задача эквивалентна стандартной задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} cx^1 + cx^2 + \dots + cx^n &\rightarrow \max, \\ P^{i+}x^i &\leq b^{i-} + y^i, \quad i = 1, \dots, n, \\ y^1 + y^2 + \dots + y^n &\leq r, \quad x^i \geq 0, \quad y^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

управлениями в которой являются векторы выпусков  $x^i$  и векторы выделенных агентам ресурсов  $y^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Дополнительная структура этой задачи, связанная с наличием нескольких агентов, позволяет произвести ее декомпозицию, используя идеологию множителей Лагранжа.

По теореме Куна–Такера существует такой вектор  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  с неотрицательными компонентами, что одна из точек максимума функции

$$cx^1 + cx^2 + \dots + cx^n - \lambda y^1 - \lambda y^2 - \dots - \lambda y^n$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} P^{i+}x^i &\leq b^{i-} + y^i, \quad i = 1, \dots, n, \\ x^i &\geq 0, \quad y^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

является решением рассматриваемой задачи линейного программирования.

Для поиска этой точки максимума можно решить  $n$  “маленьких” задач линейного программирования

$$\begin{aligned} cx^i - \lambda y^i &\rightarrow \max \\ P^{i+}x^i &\leq b^{i-} + y^i, \quad x^i \geq 0, \quad y^i \geq 0 \end{aligned}$$

с управлениями  $x^i$  и  $y^i$ .

Это обстоятельство можно использовать для построения итеративных процедур поиска решений основной задачи. Но в данной статье важнее интерпретация этих конструкций.

Число  $\lambda_l$  можно интерпретировать как цену ресурса вида  $l$ . Эту цену назначает Центр. После этого каждый из агентов выбирает свою программу выпуска  $x^i$  и объем закупаемых ресурсов  $y^i$  с тем, чтобы максимизировать свою прибыль  $cx^i - \lambda y^i$ . Если при этом агенты будут доброжелательно относиться к Центру, то при таком децентрализованном выборе управлений “общее” ограничение  $y^1 + \dots + y^n \leq r$  окажется выполненным. В противном случае выбором одних только цен невозможно решить поставленную задачу и нужно предусматривать какие-то иные механизмы согласования действий агентов.

*Замечание 1.* Ситуация здесь достаточно типична для линейных моделей. Пусть имеется несколько одинаковых предприятий, способных производить два вида продукции, стремясь максимизировать собственную прибыль. Если цены на продукты таковы, что первый вид продукции прибыльнее второго, то второй вид продукции никто производить не станет. Поэтому, если есть задача произвести заданный набор продуктов, то эти цены должны быть таковы, что прибыль от производства обоих видов продукции одинакова. Но тогда все программы производства любого предприятия, полностью загружающие его мощности, будут оптимальными. И при независимом принятии решений нет гарантии, что будет произведен именно нужный набор продукции. Следовательно, необходим некий механизм согласования решений. Впрочем, особых проблем здесь обычно не возникает, поскольку этот механизм будет предписывать каждому предприятию выбор из одинаково выгодных решений.

*Замечание 2.* Если взять допустимую точку  $(x^i, y^i)$  последней задачи, то при любом положительном  $t$  точка  $(tx^i, ty^i)$  также будет допустимой. Но при умножении переменных на  $t$  значение критерия тоже умножается на  $t$ . Следовательно, оптимальное значение критерия равно нулю. Поэтому имеет смысл, поменяв знак критерия говорить о минимизации убытков, а не о максимизации прибыли.

*Замечание 3.* Понятно, что при положительных  $y_l^i$  ограничение

$$p_{l1}^i x_1^i + p_{l2}^i x_2^i + \dots + p_{lm}^i x_m^i \leq b_l^i + y_l^i$$

в точке оптимума обращается в равенство. Поэтому при  $k > m$  решение последней задачи будет вырожденным. Весьма вероятно, что при решении задачи симплекс-методом вырождение появится еще “на подходе” к оптимуму.

## 6. Децентрализованная постановка при независимых агентах

Интерпретация, описанная в разделе 5, приводит к рассмотрению иной схемы управления той же системой.

Пусть по-прежнему имеется выделенный субъект (Центр), который имеет право выбирать распределение “общих” ресурсов  $y^1, \dots, y^n$ . Его цель состоит в максимизации суммарного производства, оцениваемого с помощью вектора цен  $c$ . Свой выбор Центр делает первым, и этот выбор становится известным всем агентам.

Исходя из имеющихся у него ресурсов,  $i$ -й агент выбирает объем выпуска продукции  $x^i$ . При этом он стремится максимизировать стоимость выпущенной продукции  $c^i x^i$ .

По-прежнему будем предполагать, что Центр знает пределы, в которых могут меняться коэффициенты матриц затрат  $P^i$  и векторов запасов  $b^i$  ( $P^{i-} \leq P^i \leq P^{i+}$  и  $b^{i-} \leq b^i \leq b^{i+}$ ). Кроме того, Центру точно известны интересы всех агентов (векторы  $c^i = (c_1^i, \dots, c_m^i)$ ).

Введем обозначения. Множество матриц  $P^i$ , удовлетворяющих условиям  $P^{i-} \leq P^i \leq P^{i+}$  обозначим через  $\Pi^i$ , а множество векторов  $b^i$ , удовлетворяющих ограничениям  $b^{i-} \leq b^i \leq b^{i+}$  – через  $B^i$ .

Естественно считать, что агент  $i$  точно знает “свой” матрицу  $P^i$  и вектор  $b^i$ .

В описанных предположениях каждый из агентов решает простую задачу оптимизации

$$c^i x^i \rightarrow \max, \quad P^i x^i \leq b^i + y^i, \quad x^i \geq 0,$$

и, что особенно важно, Центр, зная интересы агентов, способен верно оценить множество  $BR^i(y^i, P^i, b^i)$  всех решений этой задачи. Если он рассчитывает на рациональное поведение всех агентов и осторожен по отношению к остающейся неопределенности, он должен ориентироваться на максимальный гарантированный результат

$$\sup_{(y^1, y^2, \dots, y^n) \in Y} \min_{(P^1, P^2, \dots, P^n) \in \Pi^1 \times \Pi^2 \times \dots \times \Pi^n} \min_{(b^1, b^2, \dots, b^n) \in B^1 \times B^2 \times \dots \times B^n} \min_{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in BR^1(y^1, P^1, b^1) \times BR^2(y^2, P^2, b^2) \times \dots \times BR^n(y^n, P^n, b^n)} (cx^1 + cx^2 + \dots + cx^n).$$

Попробуем соотнести этот результат с результатом Центра в задаче из раздела 5 (на самом деле там рассмотрены две схемы управления, но они дают одинаковые результаты).

Зафиксируем произвольное оптимальное решение  $y^1, \dots, y^n, x^1, \dots, x^n$  задачи из раздела 5 и произвольное распределение  $v^1, \dots, v^n$  ресурсов, удовлетворяющее ограничениям

$$v^1 + v^2 + \dots + v^n \leq r, \quad v^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть  $z^i$  – оптимальное решение задачи

$$cz^i \rightarrow \max, \quad P^{i+} z^i \leq b^{i-} + v^i, \quad z^i \geq 0.$$

Тогда для любого  $w^i$ , удовлетворяющего условиям  $P^{i+} w^i \leq b^{i-} + v^i, w^i \geq 0$ , выполняется неравенство  $cw^i \leq cz^i$ . В частности, неравенство  $cw^i \leq cz^i$  справедливо для любого  $w^i \in BR(v^i, P^{i+}, b^{i-})$ .

Сложив эти неравенства, получим  $cw^1 + cw^2 + \dots + cw^n \leq cz^1 + cz^2 + \dots + cz^n$ .

Как было показано в разделе 5, для решения рассмотренной там задачи выполняются ограничения

$$P^{i+} x^i \leq b^{i-} + y^i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad y^1 + y^2 + \dots + y^n \leq r, \\ x^i \geq 0, \quad y^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно,  $cz^1 + cz^2 + \dots + cz^n \leq cx^1 + cx^2 + \dots + cx^n$ .

А тогда верно неравенство  $cw^1 + cw^2 + \dots + cw^n \leq cx^1 + cx^2 + \dots + cx^n$ .

Тем более

$$\begin{aligned} \min_{(w^1, w^2, \dots, w^n) \in BR^1(w^1, P^1, b^1) \times BR^2(w^2, P^2, b^2) \times \dots \times BR^n(w^n, P^n, b^n)} (cw^1 + cw^2 + \dots + cw^n) &\leq \\ &\leq cx^1 + cx^2 + \dots + cx^n. \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \min_{(P^1, P^2, \dots, P^n) \in \Pi^1 \times \Pi^2 \times \dots \times \Pi^n} \min_{(b^1, b^2, \dots, b^n) \in B^1 \times B^2 \times \dots \times B^n} \min_{(w^1, w^2, \dots, w^n) \in BR^1(w^1, P^1, b^1) \times BR^2(w^2, P^2, b^2) \times \dots \times BR^n(w^n, P^n, b^n)} (cw^1 + cw^2 + \dots + cw^n) &\leq \\ &\leq cx^1 + cx^2 + \dots + cx^n. \end{aligned}$$

Поскольку распределение  $v^1, v^2, \dots, v^n$  было выбрано произвольно, отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{(v^1, v^2, \dots, v^n) \in Y} \min_{(P^1, P^2, \dots, P^n) \in \Pi^1 \times \Pi^2 \times \dots \times \Pi^n} \min_{(b^1, b^2, \dots, b^n) \in B^1 \times B^2 \times \dots \times B^n} \min_{(w^1, w^2, \dots, w^n) \in BR^1(w^1, P^1, b^1) \times BR^2(w^2, P^2, b^2) \times \dots \times BR^n(w^n, P^n, b^n)} (cw^1 + cw^2 + \dots + cw^n) &\leq \\ &\leq cx^1 + cx^2 + \dots + cx^n. \end{aligned}$$

Таким образом, максимальный гарантированный результат Центра в задаче из данного раздела всегда не превосходит максимального гарантированного результата Центра в задаче из раздела 5. Пример задачи (без интерпретации), в которой это неравенство строгое, строится без особого труда.

Достаточно давно известно, что в условиях отсутствия неопределенности два рассмотренных способа управления одинаково эффективны. Здесь проявляется новый качественный эффект: в условиях неопределенности “экономический” способ управления (с помощью цен на ресурсы) может оказаться более эффективным, чем директивный (с помощью выбора физических показателей). Этот эффект еще предстоит детально изучить.

## 7. Верная структура. Два уровня

В [24, 25] отмечено, что сформулированные выше задачи по распределению Центром некоторого ресурса могут быть записаны в двухуровневой системе в общем виде: найти

$$\max_{u \in D} \left( \min_{x \in T(u)} \sum_{j=1}^n k_j x_j \right) = \max_{u \in D} F(u),$$

где

$$T(u) = \left\{ x \mid x \in T_0(u), \sum_{j=1}^n c_j x_j = \max_{y \in T_0(u)} \sum_{j=1}^n c_j y_j \right\},$$

$$T_0(u) = \left\{ x \mid x \in E^n, x \geq 0, \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i + \sum_{l=1}^k b_{il}u_l, i = 1, \dots, m \right\},$$

$$D = \left\{ u \mid u \in E^n, u \geq 0, \sum_{l=1}^k d_{rl}u_l \leq d_r, r = 1, \dots, p \right\}.$$

Задачи в данной формулировке рассматривались многими авторами, настоящее изложение следует постановке из [24].

Введем в рассмотрение функцию

$$F_0(u) = \sum_{j=1}^n k_j x_j,$$

где  $x \in T(u)$ . Эту функцию можно определить не при всех значениях  $u \in \mathbb{R}^k$ , так как  $T(u)$  может быть пустым множеством. В частности, если при всех значениях  $u$  сформулированная задача не имеет решений, то  $F_0(u)$  вообще не определена. Далее будем считать, что существует  $u_0 \in D$  такое, что  $T(u_0) \neq \emptyset$  и  $T(u_0)$  – ограниченное множество. Если  $T(u)$  содержит более одного элемента, то функция  $F_0(u)$  может принимать несколько значений. Введем также обозначение

$$F(u) = \min_{x \in T(u)} F_0(u).$$

Справедливо следующее утверждение, которое позволило перейти от максиминной задачи к оптимизационной.

*Теорема 1* [24]. *Существует  $\delta_0 > 0$  такое, что при всех  $\delta, 0 < \delta < \delta_0$  функция*

$$F_0^\delta = \sum_{j=1}^n k_j x_j,$$

где  $x \in T^\delta(u)$ , однозначна и  $F(u) = F_0^\delta(u)$ ,

$$T^\delta(u) = \left\{ x \mid x \in T_0(u), \sum_{j=1}^n (c_j - \delta k_j) x_j = \max_{y \in T_0(u)} \sum_{j=1}^n (c_j - \delta k_j) y_j \right\}.$$

*Замечание 4.* При построении алгоритма конкретное значение  $\delta$ , необходимое по теореме, не используется. Важен только факт существования такой величины.

## 8. Верная структура. Трехуровневая система

Приведем упрощенный вариант модели стратегического планирования [20], учитывающий взаимодействие активных элементов системы. Цель построения этой модели – сравнение различных схем управления.

Прообразом для этой модели служила система, состоящая из Центра, нескольких интегрированных структур (холдингов) и набора входящих в эти холдинги предприятий. Существуют технологические связи между элементами такой системы. Предприятия, используя свои мощности и выделенные им ресурсы, производят продукцию и передают ее на следующий уровень (“своим” холдингам), те перерабатывают ее и передают в Центр. На эту структуру накладываются организационные связи: элементы более высокого уровня определяют объемы ресурсов, выделяемых своим подчиненным. Все эти связи естественным образом моделируются с помощью игры с иерархической структурой.

Рассмотрим модель трехуровневой иерархической системы, состоящей из Центра и двух агентов.

Центр выбирает вектор-столбец  $x$  из множества

$$X = \{x : x \geq 0, Ax \leq a\}.$$

Здесь  $A$  – матрица с неотрицательными коэффициентами,  $a$  – вектор столбец с положительными элементами. Дополнительно будем предполагать, что каждый столбец матрицы  $A$  содержит хотя бы один строго положительный элемент (ни один вид продукции не производится без затраты хоть каких-то ресурсов). Матрица  $A$  и вектор  $a$  – это параметры задачи.

При сделанных предположениях множество  $X$  представляет собой непустой замкнутый выпуклый ограниченный многогранник.

*Замечание 5.* Можно рассматривать модели, в которых  $a$  – вектор с неотрицательными элементами. Этот случай легко сводится к рассматриваемому с понижением размерности задачи.

При выбранном векторе  $x$  агент верхнего уровня выбирает вектор столбец  $y$  из множества

$$Y(x) = \{y : y \geq 0, By \leq x\}.$$

Здесь  $B$  – заданная матрица с неотрицательными элементами, не содержащая нулевых столбцов.

Непосредственно проверяется, что при всяком  $x$  множество  $Y(x)$  представляет собой непустой выпуклый и компактный многогранник.

Наконец, если выбран вектор  $y$ , агент нижнего уровня выбирает вектор  $z$  из множества

$$Z(y) = \{z : z \geq 0, Cz \leq y\}.$$

Матрица  $C$  с неотрицательными элементами, не содержащая нулевых столбцов, вновь предполагается параметром задачи.

Из сделанных предположений следует, что множество  $Z(y)$  – непустой замкнутый, выпуклый и ограниченный многогранник.

Цель агента нижнего уровня состоит в максимизации значения функции  $h(z) = rz$ , где  $r$  – заданный вектор строка. Аналогично, интересы агента верхнего уровня описываются стремлением к увеличению значения функции

$g(y) = qy$ , где вектор строка  $q$  считается параметром задачи. Наконец, будем предполагать, что выигрыш Центра определяется функцией  $f(z) = pz$ , где  $p$  – заданный вектор-строка. Элементы векторов  $p, q, r$  будем считать неотрицательными.

Размерности векторов  $a, x, y$  и  $z$  предполагаются конечными и, вообще говоря, не совпадающими. Будем считать, что размерности матриц  $A, B, C$  и векторов  $p, q, r$  таковы, что все выписанные выше формулы формально корректны (таким образом, эти размерности определяются однозначно).

Считаем, что все параметры системы, т.е. матрицы  $A, B, C$  и векторы  $p, q, r$  точно известны Центру.

Предполагается следующий порядок принятия решений. Вначале Центр выбирает свою стратегию  $x$  из множества  $X$ . Затем агент верхнего уровня выбирает свою стратегию  $y$  из множества  $Y(x)$ . И, наконец, агент нижнего уровня выбирает стратегию  $z$  из множества  $Z(y)$ .

При сделанных предположениях для агента верхнего уровня естественно выбрать свою стратегию из множества

$$BR^t(x) = \left\{ y \in Y(x) : g(y) = \max_{v \in Y(x)} g(v) \right\}.$$

Аналогично, все разумные выборы агента нижнего уровня и только они принадлежат множеству

$$BR^l(y) = \left\{ z \in Z(y) : h(z) = \max_{w \in Z(y)} h(w) \right\}.$$

При сделанных предположениях при любом  $x \in X$  максимум в определении величины  $BR^t(x)$  достигается, а само множество  $BR^t(x)$  представляет собой непустой выпуклый и компактный многогранник. Аналогично, при любом векторе  $y$  с неотрицательными компонентами множество  $BR^l(y)$  – непустой выпуклый замкнутый и ограниченный многогранник.

Если Центру известны параметры модели, то он способен самостоятельно оценить множества  $BR^t(x)$  и  $BR^l(y)$ . Более точно оценить множества возможных выборов агентов Центр не может. Если Центр осторожен, то его максимальный гарантированный результат равен

$$\sup_{x \in X} \min_{y \in BR^t(x)} \min_{z \in BR^l(y)} f(z).$$

Будем заниматься задачей вычисления этой величины.

Из сказанного выше следует, что минимумы в последней формуле достигаются. Достижимость верхней грани придется исследовать отдельно.

## 9. Эквивалентная задача

Ограничения  $y \in BR^t(x)$  и  $z \in BR^l(y)$  не стандартны: в них присутствуют (заранее неизвестные) максимумы функций. По крайней мере для некоторых

целей от этих ограничений стоит избавиться, пусть даже за счет увеличения размерности задачи. Сделаем это.

Пусть задано произвольное  $x \in X$ . Для  $v \in Y(x)$  и  $w \in Z(y)$  определим множества

$$V(x, v) = \{y \in Y(x) : qy \geqslant qv\},$$

$$W(y, w) = \{z \in Z(y) : rz \geqslant rw\}.$$

Для всех  $x, y, v, w$  множества  $V(x, v)$  и  $W(y, w)$  – компактные выпуклые многогранники.

Для любого  $w \in Z(y)$  и любого  $z \in BR^l(y)$  выполняется неравенство  $rz \geqslant rw$ , т.е. справедливо включение  $BR^l(y) \subseteq W(y, w)$ . Следовательно,

$$\min_{z \in BR^l(y)} f(z) \geqslant \min_{z \in W(y, w)} f(z),$$

и в силу произвольности  $w \in Z(y)$  выполняется неравенство

$$\min_{z \in BR^l(y)} f(z) \geqslant \sup_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y, w)} f(z).$$

Выберем теперь  $w' \in Z(y)$  так, что  $w' \in BR^l(y)$ . Тогда по определению имеем  $W(y, w') = BR^l(y)$ . Значит,

$$\min_{z \in BR^l(y)} f(z) = \min_{z \in W(y, w')} f(z)$$

и тем более

$$\min_{z \in BR^l(y)} f(z) \leqslant \sup_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y, w)} f(z).$$

Следовательно, верхняя грань в последней формуле достигается и

$$\min_{z \in BR^l(y)} f(z) = \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y, w)} f(z).$$

Аналогично для любого  $v \in Y(x)$  и любого  $y \in BR^t(x)$  выполняется неравенство  $qy \geqslant qv$ , т.е. справедливо включение  $BR^t(x) \subseteq V(x, v)$ . Следовательно,

$$\min_{y \in BR^t(x)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y, w)} f(z) \geqslant \min_{y \in V(x, v)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y, w)} f(z)$$

и в силу произвольности  $v \in Y(x)$  выполняется неравенство

$$\min_{y \in BR^t(x)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y, w)} f(z) \geqslant \sup_{v \in Y(x)} \min_{y \in V(x, v)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y, w)} f(z).$$

Выберем теперь  $v' \in Y(x)$  так, что  $v' \in BR^t(x)$ . Тогда  $V(x, v') = BR^t(x)$  и потому

$$\min_{y \in BR^t(x)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y, w)} f(z) = \min_{y \in V(x, v')} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y, w)} f(z).$$

Тем более

$$\min_{y \in BR^t(x)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z) \leq \sup_{v \in Y(x)} \min_{y \in V(x,v)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z).$$

Значит, верхняя грань в последней формуле достигается и имеет место равенство

$$\min_{y \in BR^t(x)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z) = \max_{v \in Y(x)} \min_{y \in V(x,v)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z),$$

или

$$\min_{y \in BR^t(x)} \min_{z \in BR^l(y)} f(z) = \max_{v \in Y(x)} \min_{y \in V(x,v)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z).$$

В силу произвольности  $x \in X$  получим отсюда

$$\sup_{x \in X} \min_{y \in BR^t(x)} \min_{z \in BR^l(y)} f(z) = \sup_{x \in X} \max_{v \in Y(x)} \min_{y \in V(x,v)} \max_{w \in Z(y)} \min_{z \in W(y,w)} f(z).$$

Задачи вычисления максимального гарантированного результата в подобных случаях чрезвычайно сложны. Поэтому наличие двух способов вычисления представляется нелишним, даже если каждый из них не слишком эффективен.

Кроме того, полученный результат позволяет более адекватно оценить сложность решаемой задачи.

## 10. Существование решения

Сформулируем некоторые предварительные результаты.

Пусть  $x \in \mathbb{R}$ . Система линейных неравенств  $Ax \leq a$  задает некоторое множество точек  $P = \{x : Ax \leq a\}$ . Если это множество не пусто, то оно представляет собой многогранник. Для простоты будем считать, что это множество не пусто и ограничено. Тогда оно компактно.

Пусть  $a^i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) – строки матрицы  $A$ , а  $a_i$  – компоненты вектора столбца  $a$ . Для точки  $x \in P$  определим множество  $I(x)$  индексов  $i = 1, 2, \dots, d$ , для которых  $a^i x = a_i$ . Положим  $J(x) = \{1, \dots, k\} \setminus I(x)$ .

Пусть  $I \subset \{1, \dots, k\}$ . Если множество  $P_I = \{x \in P : I(x) = I\}$  не пусто, то оно является гранью многогранника  $P$ . Если множество  $I$  таково, что система векторов  $a^i$ ,  $i \in I$ , содержит  $d$  линейно независимых векторов, то множество  $P_I$  либо пусто, либо состоит из одной точки. В последнем случае эта точка является вершиной многогранника  $P$ .

Пусть  $L_I$  – линейная оболочка множества  $P_I$ . Тогда грань  $P_I$  является открытым подмножеством пространства  $L_I$  (в топологии индуцированной евклидовой топологией на  $\mathbb{R}^d$ ), поскольку задается системой строгих неравенств  $a^i x < a_i$ ,  $i \in J(y)$  для некоторой точки  $y \in P_I$ .

Многогранник  $P$  является объединением своих попарно не пересекающихся граней.

*Лемма 1. Замыкание любой грани  $P_I$  многогранника  $P$  содержит хотя бы одну вершину этого многогранника.*

Доказательство леммы содержится в Приложении.

В дальнейшем будет использоваться следующий вариант принципа множителей Лагранжа.

*Лемма 2. Пусть  $x \in P$ . Точка  $x$  доставляет максимум функции  $px$  на множестве  $P$  тогда и только тогда, когда существуют такие неотрицательные числа  $\lambda^i$ ,  $i \in I(x)$ , что  $p = \sum_{i \in I(x)} \lambda^i a^i$ .*

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Теперь вернемся к основной задаче.

Исход  $(x, y, z)$  будем называть полуоптимальным, если  $y \in BR^t(x)$ ,  $z \in BR^l(y)$  и  $f(z) = \min_{z' \in BR^l(y)} f(z')$ . По определению, максимальный гарантированный результат Центра равен точной верхней грани функции  $f(z)$  по множеству всех полуоптимальных исходов  $(x, y, z)$ .

Рассмотрим многогранник

$$P = \{(x, y, z) : x \geq 0, Ax \leq a, y \geq 0, By \leq x, z \geq 0, Cz \leq y\}.$$

Пусть исход  $(x, y, z) \in P$  полуоптимален. Покажем, что тогда всякий исход  $(x', y', z')$ , принадлежащий грани  $P_{I(x, y, z)}$  многогранника  $P$ , содержащей точку  $(x, y, z)$ , является полуоптимальным.

Рассмотрим многогранники

$$\Pi(x) = \{(y, z) : y \geq 0, By \leq x, z \geq 0, Cz \leq y\}$$

и

$$\Pi(x') = \{(y, z) : y \geq 0, By \leq x', z \geq 0, Cz \leq y\}.$$

Обозначим  $\bar{x} = (y, z)$ ,  $\bar{x}' = (y', z')$ , а неравенства, задающие многогранник  $\Pi(x)$ , запишем в виде  $\bar{A}\bar{x} \leq \bar{a}(x)$ , где  $\bar{A}$  – некоторая матрица, а  $\bar{a}(x)$  – вектор. Тогда многогранник  $\Pi(x')$  будет задаваться неравенствами  $\bar{A}\bar{x} \leq \bar{a}(x')$  с той же матрицей  $\bar{A}$  и, возможно, другим вектором  $\bar{a}(x')$ .

Пусть  $\bar{a}^i$  – строки матрицы  $\bar{A}$ ,  $\bar{a}_i(x)$  и  $\bar{a}_i(x')$  – элементы векторов  $\bar{a}(x)$  и  $\bar{a}(x')$  соответственно, а  $I(\bar{x})$  – множество всех индексов  $i$ , для которых выполняются равенства  $\bar{a}^i \bar{x} = \bar{a}_i(x)$ . Поскольку исходы  $(x, y, z)$  и  $(x', y', z')$  принадлежат одной грани многогранника  $P$ , для тех же индексов выполняются равенства  $\bar{a}^i \bar{x}' = \bar{a}_i(x')$ .

В силу необходимого условия леммы 2 и включения  $y \in BR^t(x)$  существуют такие неотрицательные числа  $\lambda^i$ ,  $i \in I(x)$ , что  $q = \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda^i \bar{a}^i$ . Но тогда в силу достаточного условия леммы 2 выполняется включение  $y' \in BR^t(x')$ .

Наконец, рассмотрим многогранники

$$\Pi'(y) = \{z : z \geq 0, Cz \leq y\}$$

и

$$\Pi'(y') = \{z : z \geq 0, Cz \leq y'\}.$$

Повторяя те же рассуждения с использованием этих многогранников убедимся в справедливости включения  $z' \in BR^l(y')$ .

Рассмотрим теперь многогранники

$$\Pi''(y, z) = \{z'' : z'' \geq 0, Cz'' \leq y, rz'' = rz\}$$

и

$$\Pi''(y', z') = \{z'' : z'' \geq 0, Cz'' \leq y', rz'' = rz'\}.$$

Вновь повторяя те же рассуждения, но с использованием многогранников  $\Pi''(y, z)$  и  $\Pi''(y', z')$ , придем к равенству  $f(z') = \min_{z'' \in BR^l(y')} f(z'')$ .

Таким образом, исход  $(x', y', z')$  является полуоптимальным.

В силу непрерывности, если исход  $(x, y, z)$ , является полуоптимальным, то полуоптимальными будут все исходы из замыкания грани  $P_{I(x,y,z)}$  многогранника  $P$ , содержащей точку  $(x, y, z)$ .

Но замыкание любой грани многогранника само является замкнутым многогранником. Поэтому максимум линейной функции  $f(z) = pz$  на замыкании любой грани непременно достигается в одной из вершин многогранника. Следовательно, для любого полуоптимального исхода  $(x, y, z)$  найдется вершина  $(x', y', z')$ , которая является полуоптимальным исходом и, кроме того,  $pz' \geq pz$ .

А поскольку множество вершин многогранника  $P$  конечно, верхняя грань

$$\sup_{x \in X} \min_{y \in BR^t(x)} \min_{z \in BR^l(y)} f(z)$$

непременно достигается, причем в такой точке  $x$ , что существуют такие  $y \in Y(x)$  и  $z \in Z(y)$ , для которых тройка  $(x, y, z)$  является вершиной многогранника  $P$ .

Проверка полуоптимальности – это процедура по сложности сопоставимая с одним шагом симплекс-метода. Поэтому полученные результаты сводят рассматриваемую задачу к перебору всех вершин многогранника  $P$ .

В общем случае избежать такого перебора, вероятно, нельзя. Поэтому анализ по-настоящему серьезной модели таким способом вряд ли возможен. Но изучение действительно серьезных моделей обычно проводится в несколько этапов, на первом из которых исследуется упрощенная модель. На этом этапе получить точное решение задачи с помощью перебора, скорее всего, удастся. А дальше можно использовать какие-то эвристические методы (типа метода ветвей и границ), учитывая специфику конкретной модели.

## 11. Заключение

В работе излагаются дальнейшие продвижения в приложениях иерархических игр при моделировании управляемых процессов на базе линейных зависимостей.

Полученные результаты, несомненно, войдут в инструментарий исследования операций и формализованных подходов в теории принятия решений.

Выше отмечено, что задача анализа линейной иерархической игры сводится к перебору вершин некоторого многогранника, число которых может оказаться весьма большим. Поэтому для численного решения сформулированных задач необходимо привлечение различных приближенных методов, что составит предмет дальнейших разработок.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Доказательство леммы 1.

Если  $P_I$  является вершиной, то все очевидно. В противном случае множество  $P_I$  открыто (в  $L_I$ ), а его замыкание – замкнуто. Значит, существует точка  $y$  принадлежащая замыканию, но не принадлежащая самой грани  $P_I$ . Пусть  $x \in P_I$ .

Тогда  $I(x) \subseteq I(y)$ . В самом деле, если верно равенство  $a^i x = a_i, i \in I(x)$ , то верно и равенство  $a^i z = a_i$  для любого  $z \in P_I$ . А тогда по непрерывности верно и равенство  $a^i y = a_i$ . Так как  $y \notin I$ , то включение  $I(x) \subseteq I(y)$  – строгое.

На самом деле множество  $I(y)$  содержит такой индекс  $j$ , что вектор  $a^j$  линейно не зависим от векторов  $a^i, i \in I(x)$ . Действительно, пусть  $j$  принадлежит  $I(y)$ , но не принадлежит  $I(x)$ . Предположим, вектор  $a^j$  линейно выражается через векторы  $a^i, i \in I(x)$ . Тогда из равенств  $a^i x = a_i$  следует равенство  $a^j x = a_j$ , что противоречит условию  $j \notin I(x)$ .

Грань  $P_I(y)$  принадлежит замыканию грани  $P_I$ . К грани  $P_I(y)$  можно применить те же рассуждения, еще расширив множество  $I(y)$ . Но поскольку множество  $\{1, 2, \dots, k\}$  конечно, такая процедура не может продолжаться бесконечно. Значит, в какой-то момент придем к грани, являющейся вершиной. Она и будет искомой.

Лемма доказана.

### Доказательство леммы 2.

**Необходимость.** В силу теоремы Куна–Такера существуют неотрицательные числа  $\lambda^i$ , для которых  $p = \sum_{i=1}^k \lambda^i a^i$ . В силу условий дополняющей нежесткости  $\lambda^i = 0$  при  $i \in J(x)$ . Следовательно,  $p = \sum_{i \in I(x)} \lambda^i a^i$ .

**Достаточность.** Пусть  $y$  – произвольная точка множества  $P$ . Тогда

$$py = \sum_{i \in I(x)} \lambda^i a^i y \leq \sum_{i \in I(x)} \lambda^i a_i = \sum_{i \in I(x)} \lambda^i a^i x = px.$$

По определению это означает, что  $x$  – точка максимума.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
2. Nobel Prize Committee et al. Oliver Hart and Bengt Holmstrom: Contract Theory / Scientific Background on the Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel. 2016.

3. *von Stackelberg H.* The Theory of the Market Economy. London: William Hodge, 1952.
4. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1978.
5. *Кукушкин Н.С.* Роль взаимной информированности сторон в играх двух лиц с непротивоположными интересами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 4. С. 1029–1034.
6. *Ватель И.А., Ерешко Ф.И.* Математика конфликта и сотрудничества. М.: Знание, 1973.
7. *Ватель И.А., Ерешко Ф.И., Кононенко А.Ф.* Игры с фиксированной последовательностью ходов и иерархические системы управления в экономике / Методы оптимизации и их приложения. Иркутск: Изд-во Сиб. энерг. ин-та, 1974. С. 86–99.
8. *Ватель И.А., Ерешко Ф.И.* Игры с иерархической структурой / Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1979. С. 478–482.
9. *Кукушкин Н.С., Морозов В.В.* Теория неантагонистических игр. М.: Изд-во МГУ, 1984.
10. *Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Динамические модели конфликтов. III. Иерархические игры // АИТ. 2015. № 2. С. 89–106.  
*Gorelov M.A., Kononenko A.F.* Dynamic Models of Conflicts. III. Hierarchical Games // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 2. P. 264–277.
11. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
12. *Germeier Yu.B.* Nonantagonistic games / Translated from the Russian and with a preface by Anatol Rapoport. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1986.
13. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
14. Механизмы управления: Учебное пособие / Под ред. Д.А. Новикова. М.: ЛЕЛАНД, 2011.
15. *Ерешко Ф.И., Турко Н.И., Цвиркун А.Д., Чурсин А.А.* Синтез организационных структур в крупномасштабных проектах цифровой экономики // АИТ. 2018. № 10. С. 121–142.  
*Ereshko F.I., Turko N.I., Tsvirkun A.D., et al.* Design of Organizational Structures in Large-Scale Projects of Digital Economy // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 10. P. 1836–1853.
16. *Ерешко Ф.И.* Управление в искусственных нейронных сетях // Информатика: проблемы, методы, технологии : материалы XXIII Международной научно-практической конференции им. Э.К. Алгазинова, Воронеж, 15–17 февраля 2023 года. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2023. С. 4–26.
17. *Зацаринный А.А., Козлов С.В., Колин К.К.* Система распределенных ситуационных центров России как технологическая основа информационно-аналитического обеспечения органов государственного управления // Информационные процессы, системы и технологии. 2023. Т. 4. № 3 (27). С. 21–28.
18. *Глушков В.М.* Макроэкономические модели и принципы построения ОГАС. М.: Статистика, 1975.
19. *Ерешко Ф.И., Горелов М.А.* Иерархические игры в глубоком обучении // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2023. Тр. 16-й между. конф. М.: ИПУ РАН, 2023. С. 63–67.

20. *Ерешко Ф.И., Мушков А.Ю., Турко Н.И., Цвиркун А.Д.* Управление в крупномасштабных проектах многоукладной экономики // *АиТ.* 2022. № 5. С. 102–132.
21. *Поспелов И.Г.* Системный анализ рыночной экономики. Уч. пос. М.: МФТИ, 2018.
22. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* Информированность и децентрализация управления // *АиТ.* 2019. № 6. С. 156–172.  
*Gorelov M.A., Ereshko F.I.* Awareness and Control Decentralization // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 6. P. 1109–1122.
23. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* Информированность и децентрализация управления (стохастический случай) // *АиТ.* 2020. № 1. С. 52–66.  
*Gorelov M.A., Ereshko F.I.* Awareness and Control Decentralization: Stochastic Case // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 1. P. 41–52.
24. *Ерешко Ф.И., Злобин А.С.* Алгоритм централизованного распределения ресурсов между активными подсистемами // *Экономика и мат. методы.* 1977. № 4. С. 703–713.
25. *Ereshko F.I., Zlobin A.S.* Mathematical methods for the analysis of hierarchical systems. II / *Numerical methods for solving game-theoretic, equilibrium and pareto optimization problems.* IIASA. Laxenburg, Austria: CP-84-20. 1984. P. 1–26.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.*

Поступила в редакцию 30.05.2024

После доработки 02.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024

© 2024 г. А.В. АХМЕТЗЯНОВ, канд. техн. наук (atlaswa@gmail.com),  
А.В. САМОХИН, д-р техн. наук (samohinalexey@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ВОЛНОВЫЕ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ РАЗРАБОТКОЙ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ С АНОМАЛЬНЫМИ ЗАПАСАМИ<sup>1</sup>

При добыче нефти из резервуаров месторождений использование активных физико-химических реагентов в комбинации с высокочастотными волновыми колебаниями в качестве управляющих воздействий приводят к увеличению фактора нефтеотдачи пластов за счет вовлечения в процесс вытеснения запасов неизвлекаемых традиционным заводнением (с закачкой воды в нагнетательные скважины). В статье приведены результаты экспериментов, использующих математическую модель цилиндрических волн в направлении фильтрационного потока флюидов; показана эффективность циклических управляющих волновых воздействий. Отмечены сложные проблемы, связанные с применением методов гидродинамики к слаборазрывным колебаниям в неоднородной среде и указаны пути к их разрешению. Показано, что предлагаемые комбинированные методы управляющих воздействий на процесс фильтрационного вытеснения аномальных и трудноизвлекаемых фракций нефти из нефтенасыщенных пористых сред природных залежей обеспечивают увеличение коэффициента конечной нефтеотдачи потенциально на 10–15%.

*Ключевые слова:* аномальные и трудноизвлекаемые запасы нефти, активные физико-химические реагенты, циклические управляющие воздействия, цилиндрические слаборазрывные волны давления, математическая модель процесса.

DOI: 10.31857/S0005231024100042, EDN: YVLTUV

### 1. Введение

Эффективность извлечения аномальных (высоковязких) и трудноизвлекаемых (защемленных в низкопроницаемых пластах и/или удерживаемых на стенках пор и трещин капиллярными силами и/или силами адгезии и др.) запасов нефти из природных залежей традиционными методами является неудовлетворительной. При таком подходе к разработке месторождений остаточные (не извлеченные) запасы нефти достигают в среднем 55–75% от первоначальных геологических. Поэтому проблема повышения эффективности разработки с аномальными и трудноизвлекаемыми запасами природными залежами является чрезвычайно актуальной. Для достижения наибольшего коэффициента нефтеотдачи природных залежей необходимо воспользоваться

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда: проект № 21-71-20074 (А.В. Ахметзянов) и проект № 23-21-00390 (А.В. Самохин).

современными технологиями активного управляющего воздействия на процесс фильтрации флюидов (нефти, газа и водных растворов активных реагентов) в пористых средах резервуаров месторождений. Для извлечения аномальных запасов нефти применяют активные управляющие воздействия на всех этапах разработки. Физико-химические воздействия в насыщенных флюидами пористых средах приводят к изменению свойств пластовой воды и поверхностей (границ) раздела между водой, нефтью и горной породой, к уменьшению относительной подвижности воды и нефти, что приводит к выравниванию фронта вытеснения и способствует повышению нефтеотдачи пластов и увеличению как охвата пластов вытеснением, так и коэффициента нефтеотдачи залежей.

В статье предлагается общий подход к решению проблем изотермического вытеснения аномальной и трудноизвлекаемой нефти с применением следующих перечисленных ниже высокоэффективных вариантов активных реагентов (см. [1–6]), в частности вытеснение нефти водными растворами активных реагентов:

1. *Поверхностно-активные вещества (ПАВ)*. При вытеснении нефти водными растворами ПАВ снижается поверхностное натяжение на границе «нефть–вода», увеличивается подвижность нефти, что улучшает вытеснение ее водой. Кроме того, за счет улучшения смачиваемости породы вода впитывается в поры, занятые нефтью, что выравнивает фронт вытеснения полимеров.

2. *Полимеры*. При вытеснении полимерами образуется высокомолекулярный химический реагент – полимер (полиакриламид), который даже при малых концентрациях существенно повышает вязкость воды, снижает ее подвижность и в результате повышает охват пластов вытеснением. Загущение воды приводит к соответствующему уменьшению соотношения вязкостей нефти и воды в пласте, что приводит к ухудшению условий для прорыва воды, обусловленных неоднородностью пласта. Полимерный раствор преимущественно проникает в высокопроницаемые слои, что приводит к выравниванию динамической неоднородности потоков жидкости и обеспечивает полноту охвата пластов вытеснением.

3. *Щелочи*. При щелочном вытеснении происходит взаимодействие щелочей с нефтью и породой. При контакте щелочи с нефтью происходит ее взаимодействие с органическими кислотами, в результате чего образуются поверхностно-активные вещества, снижающие межфазное натяжение на границе раздела фаз «нефть–раствор щелочи» и увеличивающие смачиваемость породы водой, что приводит к повышению коэффициента вытеснения нефти водой за счет отмывания удерживаемых на поверхности трещин и пор высоковязких отложений и пленок нефти.

4. *Двуокись углерода (CO<sub>2</sub>)*. При растворении двуокиси углерода вязкость воды увеличивается незначительно (лишь на 20–30% при массовом содержании CO<sub>2</sub> в воде 3–5%), а образующаяся при этом угольная кислота H<sub>2</sub>CO<sub>3</sub>

растворяет некоторые виды цемента и породы пласта, что повышает ее проницаемость. Более того, двуокись углерода снижает набухаемость глиняных частиц и растворяется в нефти в 4–10 раз лучше, чем в воде, поэтому она может переходить из водного раствора в нефть и межфазное натяжение между ними становится настолько низким, что вытеснение приближается к смешивающемуся. Благодаря этому происходит отмывание удерживаемых на поверхности трещин и пор высоковязких отложений и пленок нефти и фазовая проницаемость нефти увеличивается. Кроме того, при растворении в нефти  $\text{CO}_2$  вязкость нефти уменьшается, плотность повышается, что вносит основной вклад при вытеснении высоковязкой нефти за счет уменьшения ее вязкости. При давлении выше давления полного смешивания нефти с  $\text{CO}_2$  двуокись углерода будет вытеснять нефть как обычный растворитель. В пласте образуются три зоны: зона первоначальной пластовой нефти, переходная зона (нефти и закачиваемого активного реагента) и водная зона.

Если  $\text{CO}_2$  нагнетается в заводненную залежь, то перед зоной  $\text{CO}_2$  формируется вал нефти, вытесняющий пластовую воду. Таким образом, увеличение объема нефти под воздействием растворяющегося в нем  $\text{CO}_2$  наряду с изменением вязкости жидкостей (уменьшением вязкости нефти и увеличением вязкости воды) – один из основных факторов, определяющих эффективность его применения в процессах добычи нефти на поздней стадии разработки месторождений.

5. *Композиции активных реагентов.* Наибольший приоритет следует отдать мицеллярно-полимерному вытеснению нефти, предложенному американскими учеными, позволяющему возобновить разработку полностью обводненного месторождения. Проведенные в США эксперименты показали, что закачка мицеллярных растворов (МР) в размере 10% от порового пространства позволяет добыть до 60% не извлеченной при обычном вытеснении нефти водой. При закачке мицеллярно-полимерных растворов процесс вытеснения нефти производится оторочками МР, продвигаемыми вначале полимерным раствором, а затем водой. Обычно такой раствор состоит из мицелл (микроассоциатов) или сгустков водо- и нефтерастворимых ПАВ, способных поглощать большие количества воды (до 80% от объема раствора). При этом внешней фазой (дисперсной средой) остается нефть и, следовательно, МР способен смешиваться в пористой среде (не образуя границ раздела и менисков) с нефтью, несмотря на содержание в нем большого количества воды. С увеличением в МР внутренней фазы мицеллы увеличиваются, что приводит к обращению фаз: МР с внешней нефтяной фазой переходит в раствор с внешней водной фазой, хорошо смешивающейся с водой. В состав МР входят углеводородная жидкость, вода и ПАВ различного состава, включая спирты. При продвижении их по пласту использование высоковязких растворов полимеров позволяет применять оторочки меньших объемов. Смешиваемость МР с водой и нефтью, а также достаточно низкое поверхностное натяжение на границе раздела МР с нефтью и водой создают благоприятные условия для вытеснения нефти за счет практического обнуления капиллярных сил.

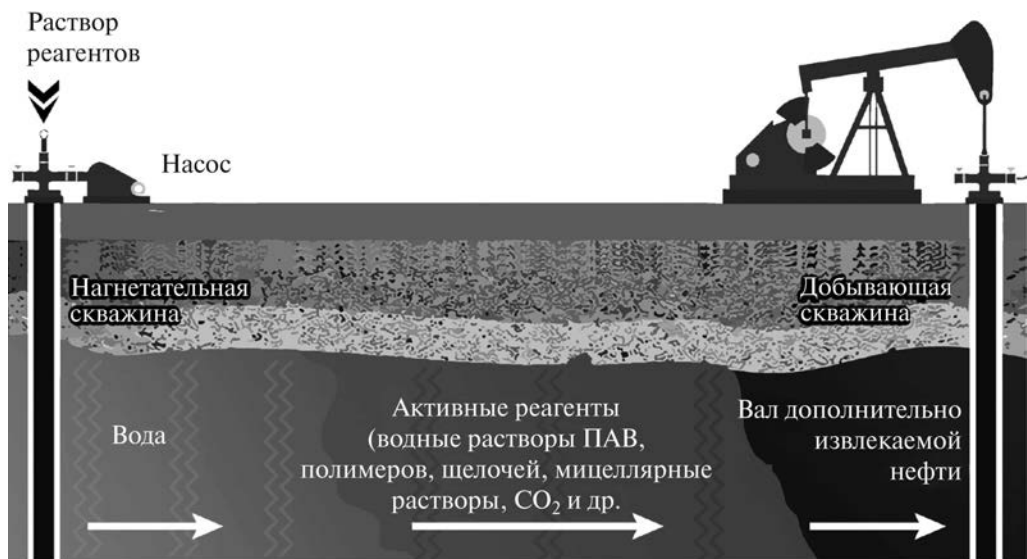


Рис. 1. Потоки фильтрации оторочек активного реагента и воды.

При всех перечисленных способах вытеснения аномальных и трудноизвлекаемых запасов нефти формируются последовательные потоки фильтрации оторочек активных реагентов и воды, представленные на рис. 1.

Следовательно, для создания нестационарных моделей указанных выше способов вытеснения можно воспользоваться решениями начально-краевых задач для обобщенных уравнений Бакли–Левретта с учетом распределения баланса концентраций флюидов при вложенных гармонических управляющих воздействиях, определяемых также решениями (соответствующим рассматриваемому способу) обобщенного уравнения  $KdV$  – Бюргерса. В работе представлены результаты исследования оптимизации первого из описанных выше методов за счет применения волновых управляющих воздействий в комбинации с циклической закачкой последовательности оторочек растворов поверхностно-активных веществ и воды. При таком воздействии снижается поверхностное натяжение на границах раздела фаз (оторочек нефти, раствора ПАВ и воды), увеличивается подвижность нефтяных фракций (улучшает вытеснение их водными фракциями) и смачиваемости породы (водные фракции впитываются в поры занятые неподвижной зацементированной в мелких порах нефтью), а суммарный результат этих воздействий выравнивает фронт вытеснения, что способствует полноте извлечения нефти месторождений с аномальными и трудноизвлекаемыми запасами. Импульсные волновые воздействия ускоряют эти процессы за счет интенсивного перемешивания и отрыва аномальных по вязкости фракций нефти, удерживаемых силами адгезии и капиллярных сил на поверхности стенок пор, что увеличивает их проницаемость за счет очищения пор и даже способствует вовлечению в процесс извлечения зацементированной нефти из застойных зон.

## 2. Модель диффузионного процесса

Высокочастотные волновые колебания ускоряют диффузию и приводят к тому, что резкие границы между водой и растворителем, а также и между растворителем и вязкой нефтью начинают интенсивно размываться, и процесс разжижения заходит в более далекие (по отношению к оси излучателя)

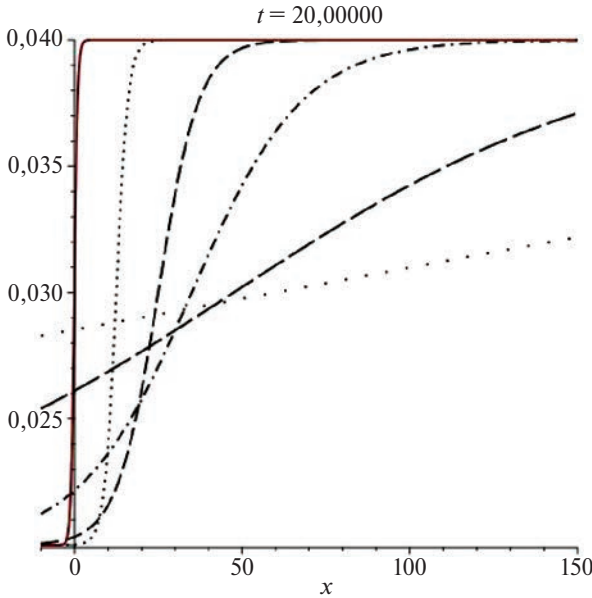


Рис. 2. Динамика вязкости при  $\varepsilon_2 = 0,04$ ,  $\varepsilon_1 = 0,02$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0,3$ ,  $s = 5$ .

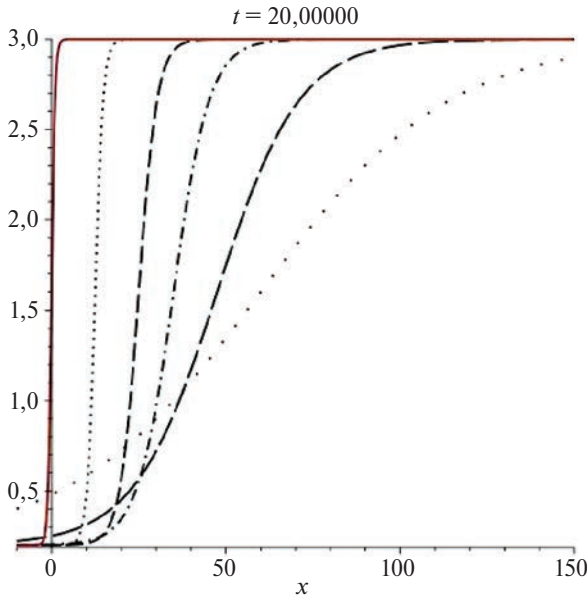


Рис. 3. Динамика вязкости при  $\varepsilon_1 = 0,2$ ,  $\varepsilon_2 = 3$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $s = 0$ .

слои нефти. В первом приближении можно рассмотреть следующую модель, описывающую изменение вязкости смеси в рабочем пространстве

$$(1) \quad \varepsilon(x, t) = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2} + \frac{(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2} \tanh(e^{-\alpha t}(x - x_0 - \beta t)).$$

Здесь:  $t$  – время,  $x$  – расстояние от оси излучателя,  $\varepsilon_1$  – коэффициент вязкости воды,  $\varepsilon_2$  – коэффициент вязкости нефти,  $\alpha$  – коэффициент скорости диффузии (линейно зависит от частоты волнового воздействия),  $\beta$  – скорость вытеснения (зависит от амплитуды воздействия),  $x_0$  – начальное удаление границы раздела от оси излучателя. Отметим, что модель пренебрегает начальной толщиной слоя растворителя. В процессе с течением времени вязкости составляющих смеси выравниваются.

Это иллюстрируют рис. 2 и 3. На них представлено изменение вязкости в соответствии с формулой (1); слева направо показаны моменты  $t = 0; 4; 8; 12; 16; 20$ .

Важно понимать, что описанная здесь эволюция диффузионного процесса и форма рабочей зоны являются априорными (хотя и правдоподобными). Эта модель подлежит уточнению при помощи теории фильтрации флюидов в пористой среде и численных экспериментов.

### 3. Качественная картина распространения гармонических колебаний в вязкой среде

Синусоидальные волновые воздействия высокой частоты, в том числе ультразвук, представляют наибольший интерес для практики нефтедобычи, [7, 8]. Рассмотрим (на фоне постоянного вытесняющего давления) бегущую концентрическую волну, излучаемую вертикальным генератором и имеющую первоначально синусоидальную форму в среде с вязкостью и теплопроводностью. Если интенсивность волны достаточно велика, то по мере распространения ее форма меняется вследствие нескольких факторов. Во-первых, это геометрическая (вследствие увеличения радиуса фронта волны). Кроме того, синусоидальность деформируется вследствие нелинейности – разности в скоростях, различных по высоте участков профиля волны. Точки, испытывающие большее давление, движутся быстрее. В результате крутизна волновых фронтов увеличивается, и могут возникнуть слабые разрывы вместо гладких экстремумов. Волна приобретает пилообразную форму. Однако настоящих разрывов не возникает: влияние вязкости и теплопроводности приводит к сглаживанию профиля волны, уменьшению градиентов скорости и температуры. Поэтому при распространении синусоидальной (вблизи генератора) волны увеличение крутизны ее фронта происходит до тех пор, пока влияние нелинейных и диссипативных факторов не компенсируется. Происходит стабилизация формы волны (с точностью до геометрической расходимости концентрического процесса распространения). После стабилизации

форма волны продолжает меняться: затухание амплитуды приводит к уменьшению влияния нелинейных эффектов, и профиль волны постепенно сглаживается, сначала вновь приобретая квазигармоническую форму с исходной частотой и стремящейся к константе амплитудой синусоидальной компоненты. В рассматриваемой задаче волны распространяются в относительно тонком слое месторождения от малого источника колебаний и, следовательно, имеют цилиндрическую форму. Распространение цилиндрических волн амплитуды сходно с процессом распространения плоских волн. Как и там, нелинейные явления вызывают изменение формы распространяющейся волны и могут привести к возникновению слабых ударных волн и интенсивному поглощению. Различия проявляются, однако, в ином темпе нарастания нелинейных искажений при распространении цилиндрических волн, что вызвано изменением амплитуд таких волн вследствие их геометрической расходимости. Для описания распространения цилиндрических волн конечной амплитуды система уравнений гидродинамики и уравнение состояния сводятся (без учета дисперсии) к одному приближенному уравнению вида

$$(2) \quad a \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{2r} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial y} = a \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Здесь  $y = t - r/c_0$ ,  $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$ ,  $r$  – расстояние до излучателя и  $c_0$  скорость сигнала в среде.

Отметим, что это уравнение применимо лишь в случае  $kr \gg 1$ ,  $y = t - (r - r_0)/c_0$ ,  $k$  – волновое число. После замены переменных это совпадает с уравнением Korteweg–de Vries для цилиндрических волн. Приведем его безразмерную нормированную форму.

$$(3) \quad u_t = -2uu_x + \varepsilon(x, t)u_{xx} + u/2t.$$

Для учета дисперсии, возникающей за счет нелинейных эффектов, вводится дополнительное слагаемое, что приводит к уравнению Korteweg–de Vries–Бюргера

$$(4) \quad u_t = -2uu_x + \varepsilon(x, t)u_{xx} + u/2t + u_{xxx}.$$

Здесь  $u$  – приведенная величина возмущения. Начально-граничная задача выглядит так:

$$(5) \quad u(x, 0) = a, \quad u(0, t) = a + b \sin(kt), \quad u(L, t) = a, \quad u_x(L, t) = 0, \quad L \gg 0.$$

Здесь  $a$  – смещение, вызванное постоянным вытесняющим давлением,  $b$  и  $k$  – амплитуда и частота волнового воздействия. Для  $t \gg 1$  уравнение (2) стремится к плоскому уравнению Korteweg–de Vries–Бюргера;

$$u_t = -2uu_x + \varepsilon(x, t)u_{xx} + u_{xxx},$$

то же происходит с его решениями.

#### 4. Численное моделирование

Было проведено численное моделирование вытеснения из пласта остаточной нефти с применением поверхностно активных веществ с учетом волновых воздействий в соответствии с моделями, описанными в разделах 2 и 3. На рис. 4–5 показана зона проникновения волновых воздействий совместно с ди-

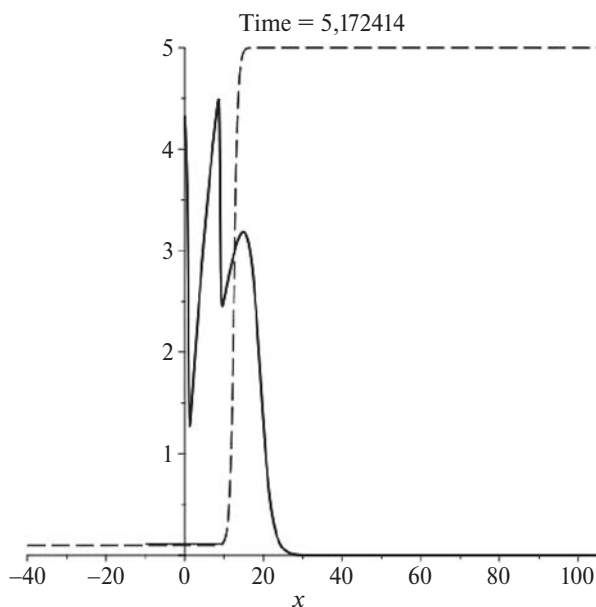


Рис. 4. Совместная динамика волновых воздействий и оторочки ПАВ;  $t \approx 5$ .

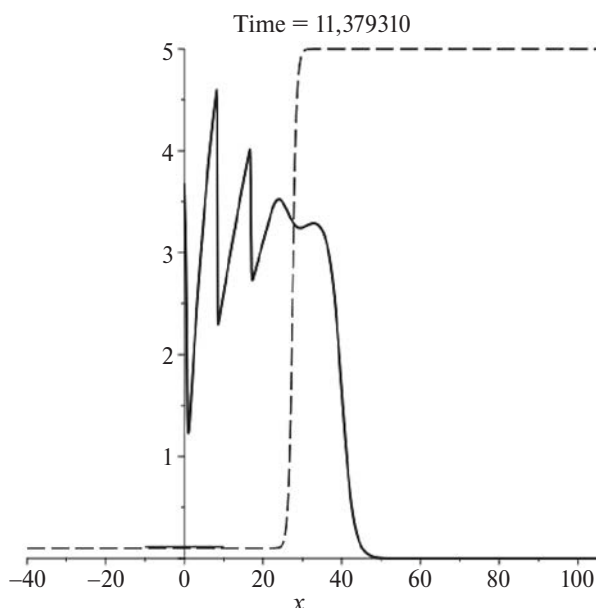


Рис. 5. Совместная динамика волновых воздействий и оторочки ПАВ;  $t \approx 11$ .

наимкой коэффициентов вязкости в случае  $\varepsilon_1 = 0,1$ ,  $\varepsilon_2 = 5$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0,002$ ;  $x_0 = 0$ , т.е.

$$\varepsilon(x, t) = 2,55 + 2,45 \tanh(e^{-0,002t}(x - 2t)).$$

Волновое воздействие первоначально имеет гармоническую форму  $u(0, t) = 3 + 2 \sin(5t)$ . Конкретные цифры в этом примере не привязаны к какому-либо месторождению или характеристикам поверхностно активных веществ. На этом этапе, в первую очередь, интересен принципиальный эффект управляющих волновых воздействий. Однако 50-кратное превышение вязкости нефти по сравнению с водой представляется правдоподобным. Как это видно из графиков численных решений, гармоническая форма преобразуется в пилообразную слаборазрывную форму и затем затухает до стабильной ударной волны. Затухание заканчивается в окрестности наибольшего градиента коэффициента вязкости на разделе между водой и остаточной нефтью. В этой зоне затрачивается вся энергия синусоидальной компоненты гармоника. Дальнейшее распространение монотонной выпуклой формы ударной волны объясняется наличием постоянной составляющей гармоника; ее скорость соответствует скорости звука в вязкой среде. Для цилиндрической волны форма этого монотонного участка вплоть до ударного фронта участка задается формулой

$$u(x, t) = \frac{V}{3} \left( 2 + \sqrt{\frac{(4 - 3x)}{\sqrt{t}}} \right),$$

как это показано в [9]. Здесь  $V$  – скорость звука, соответствующая амплитуде в среде с квадратичной нелинейностью.

На рис. 4–7 сплошная линия соответствует амплитуде волнового воздействия, а пунктирная линия – распределению вязкости в зависимости от расстояния от оси генератора колебаний; рисунки отвечают последовательным моментам времени  $t = 5, 11, 18$  и  $25$ .

На основании анализа графиков, представленных на рис. 4–7, можно сделать вывод об эффективности волновых воздействий в методе вытеснения остаточной нефти с применением ПАВ. За счет выбора подходящей начальной гармоники волновое воздействие можно довести до границы раздела между раствором ПАВ и нефтью, где энергия колебаний будет полностью затрачиваться на процесс их перемешивания и, благодаря комплексному воздействию, будет увеличивать концентрацию дополнительной нефти в потоке фильтрации добываемой продукции.

Для оценки эффективности предлагаемого подхода необходимо оценить два параметра управляющего волнового воздействия. Специфика соответствующих научных проблем состоит в том, что среда, в которой происходит процесс сильно неоднородна (вода–переходной слой–нефть), и получение точных аналитических решений представляется нереальной задачей. На первом этапе исследований неизбежны численные эксперименты, а в дальнейшем и натурные. С практической точки зрения важна зависимость дальности проникновения от источника колебаний нелинейной волны (ее эффективной ра-

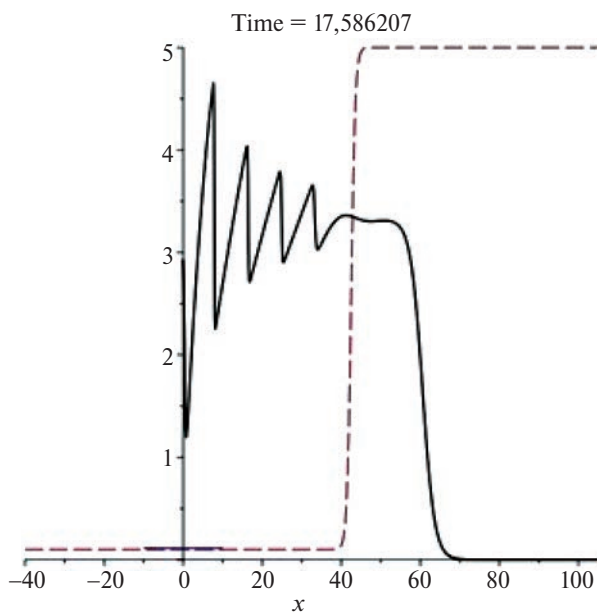


Рис. 6. Совместная динамика волновых воздействий и оторочки ПАВ;  $t \approx 18$ .

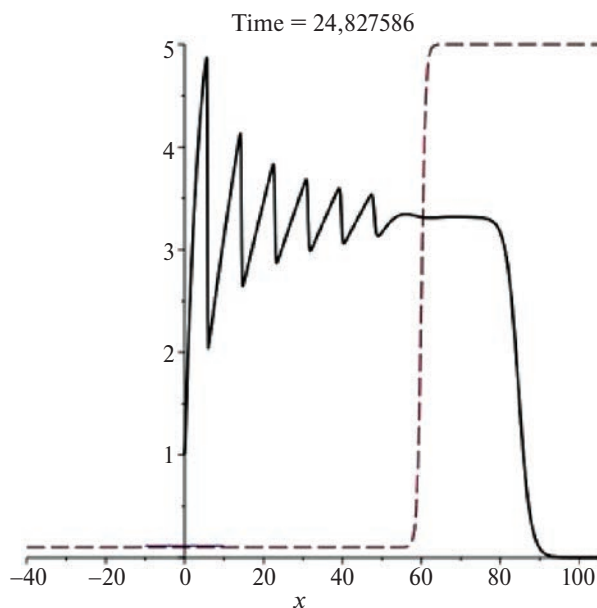


Рис. 7. Совместная динамика волновых воздействий и оторочки ПАВ;  $t \approx 25$ .

бочей части) от ее амплитуды и частоты, а также от гидродинамических свойств среды. В литературе можно найти подобного рода оценки, но только для однородной среды. Так, положение разрыва цилиндрической волны определяется следующим условием:

$$2\sigma_0|\sqrt{r/r_0} - 1| = 1,$$

где  $\sigma = rMk\varepsilon$  – безразмерное расстояние,  $M$  – число Маха. Оценка дальности распространения пилообразной формы волны дается формулой:

$$\sigma_{fin} = \pi^2/2\Gamma, \quad \Gamma = 2\varepsilon\sigma \times Re.$$

см. [7].

Необходимо отметить, что эти оценки относятся к однородной среде и подлежат уточнению в случае трехкомпонентной среды вода–активный реагент–аномальная нефть.

## 5. Механизм волновых процессов вытеснения нефти активными реагентами

Высокая эффективность волновых процессов вытеснения нефти активными реагентами определяется следующими обстоятельствами. При больших амплитудах колебаний в жидкостях возникают стационарные потоки, или акустические течения. Эти потоки особенно выражены вблизи препятствий различного рода, размещенных в зоне воздействия. Они всегда носят вихревой характер. Скорость этих потоков возрастает с увеличением интенсивности, но даже при наибольших интенсивностях остается меньше колебательной скорости в волне [10].

Как известно, потоки вызываются постоянными силами, величина которых может быть оценена с учетом нелинейных эффектов. Акустическим течениям посвящено большое число публикаций. С точки зрения возможностей более полного извлечения нефтяных запасов особый интерес представляют пограничные течения вблизи поверхностей тел, соприкасающихся с полем колебаний. Эти течения, возмущая пограничный слой, объясняют ускорение процессов переноса под действием колебаний: теплопередачи нагретых тел, изменения концентрации при очистке загрязненных поверхностей и тому подобных. Акустическое воздействие является эффективным методом возмущения пограничного слоя.

Для обсуждаемой проблемы важны следующие типы акустических потоков:

Первый – это течения вне пограничного слоя, которые также имеют вихревой характер. Масштаб этих вихрей существенно больше масштаба вихрей пограничного слоя. Один из видов течения этого типа – двумерное течение между двумя плоскостями, возникающее под действием волны; вихри в этом случае имеют масштаб, равный длине звуковой волны. Такие вихри в предложенном подходе должны способствовать перемешиванию компонентов внутри рабочей зоны.

Второй – это течения, возникающие в вязком пограничном слое вблизи верхней и нижней границ залежи. Известно, что под действием высокочастотных колебаний стационарные потоки в пограничном слое имеют вихревой характер. Масштаб этих пограничных вихрей, как правило, определяется толщиной акустического пограничного слоя, по размеру они намного меньше длины волны. Эти вихри в предлагаемом авторами статьи подходе будут очищать границы нефтеносного слоя от пленок и капелек, застрявших в порах границы. Для этих остатков на жесткой поверхности градиент скорости нормален

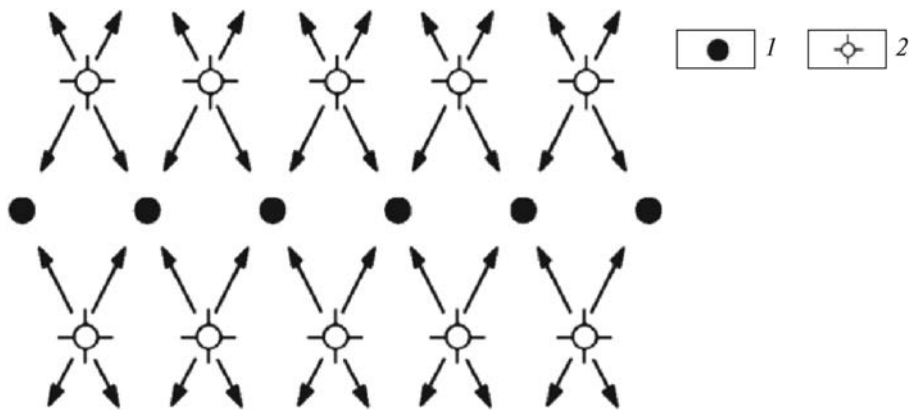


Рис. 8. Схема размещения отбирающих (1) и нагнетательных (2) скважин.

к поверхности и, по необходимости, велик при переходе к общему течению в слое. Это и приводит к отрыву нефти от стенок.

Динамика пограничного слоя при прохождении волны в направлении оси  $x$  описывается уравнениями Прандтля

$$(6) \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

Здесь  $y$  – нормальная к поверхности координата,  $v_1$  и  $v_2$  –  $x$  и  $y$  компоненты скорости,  $U(x, t)$  – известная скорость потока вдали от границы. Отметим, что для пилообразной волны  $\frac{\partial U}{\partial x}$  разрывна.

Известные оценки для скорости  $v$ , например см. [10], полученные в случае синусоидальных колебаний  $U$ , едва ли применимы. Однако совершенно очевидно, что на слабых разрывах поглощение энергии усиливается и скорости вихрей растут. Аналитическое решение уравнения (5) недоступно. Приближенные решения получают методом возмущений, но в случае пилообразных волн неизбежно применение методов численного моделирования.

Для реализации предлагаемых технологий следует воспользоваться треугольной схемой размещения нагнетательных и добывающих скважин (см. рис. 8), а волновые воздействия целесообразно производить в нагнетательных скважинах последовательно через одну. При этом выбор длительности интервалов волнового воздействия и объемные размеры оторочек активных реагентов будут дополнительными средствами управления (см. рис. 8).

Предлагаемые результаты исследований без особых затруднений могут быть использованы для создания моделей потоков гетерогенных смесей флюидов в насыщенных аномально вязкой нефтью пористых сплошных средах, когда имеет место монотонное увеличение или снижение фильтрационных сопротивлений, т.е. псевдопластичные или дилатантные течения, описываемые степенными и трехчленными законами фильтрации Форхгеймера [6].

## 6. Заключение

В статье рассматривается добыча трудноизвлекаемых запасов нефти с использованием активных реагентов, высокочастотные волновые колебания ускоряют диффузию и приводят к интенсивному выравниванию фронта вытеснения за счет сглаживания границ раздела между водой и активным реагентом. В результате выравниваются фильтрационные параметры флюидов (нефти, воды и активных реагентов) в потоке, что способствует увеличению фактора нефтеотдачи (коэффициента извлечения нефти) пластов залежей.

Применение высокочастотных волновых колебаний ускоряет диффузию и приводит к тому, что резкие границы между водой и растворителем, а также и между растворителем и вязкой нефтью начинают интенсивно размываться, и процесс разжижения заходит в более далекие (по отношению к оси излучателя) слои нефти. Изучена качественная картина этого процесса.

Если интенсивность волны достаточно велика, то по мере распространения ее форма меняется вследствие нескольких факторов.

Во-первых, это геометрический фактор (следствие увеличения радиуса фронта волны). Во-вторых, синусоидальность деформируется вследствие нелинейности – разности в скоростях различных по высоте участков профиля волны. Точки, испытывающие большее давление, движутся быстрее. В результате крутизна волновых фронтов увеличивается и могут возникнуть слабые разрывы вместо гладких экстремумов. Волна приобретает пилообразную форму. При распространении первоначально синусоидальной волны увеличение крутизны ее фронта происходит, пока влияние нелинейных и диссипативных факторов не компенсируется. Происходит стабилизация формы волны (с точностью до геометрической расходимости концентрического процесса распространения).

После стабилизации форма волны продолжает меняться: профиль постепенно сглаживается, сначала вновь приобретая квазигармоническую форму с исходной частотой и стремящейся к константе амплитудой синусоидальной компоненты. На этом этапе энергия управляющих колебаний полностью отдается среде, в которой возникает хаотическое тепловое движение.

Были проведены численные эксперименты с использованием математической модели процесса для цилиндрических волн вокруг направления фильтрационного потока флюидов. На основании этих расчетов можно сделать вывод об эффективности волновых воздействий в методе вытеснения остаточной нефти с применением ПАВ. За счет выбора подходящей начальной гармоники возможно донести энергию колебаний в пограничную зону между водой и нефтью, где она полностью тратится на перемешивание нефти и ПАВ и, тем самым, увеличит вовлеченность нефти в раствор и скорость процесса.

В статье отмечены сложные проблемы, связанные с применением методов гидродинамики к слабаразрывным колебаниям в неоднородной среде и указаны пути их разрешения.

Поскольку при использовании всех типов активных реагентов (растворами: углекислоты, ПАВ, щелочей, полимеров и др.) механизм волновых процессов вытеснения трудноизвлекаемых запасов нефти идентичен, можно быть уверенным в том, что проведение аналогичных исследований подтвердит эффективность циклических управляющих волновых воздействий в интервале закачки активных реагентов для повышения нефтеотдачи природных залежей. Применение волновых воздействий с использованием комбинации (тепловых, физико-химических и др.) активных реагентов, приведет к большей эффективности процессов вытеснения трудноизвлекаемых запасов нефти и значительному повышению нефтеотдачи пластов.

Предложенные в статье результаты являются дальнейшим развитием и обобщением методов, изложенных в статье [11].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сургучев М.Л.* Вторичные и третичные методы увеличения нефтеотдачи пластов. М.: Недра, 1985.
2. *Шелепов В.В.* Состояние сырьевой базы нефтяной промышленности России. Повышение нефтеотдачи пластов. М.: Недра, 1992
3. *Амелин И.Д., Сургучев М.Л., Давыдов А.В.* Прогноз разработки нефтяных залежей на поздней стадии. М.: Недра, 1994.
4. *Еремин Н.А.* Современная разработка месторождений нефти и газа. М.: Недра, 2008.
5. *Земцов Ю.В., Мазаев В.В.* Современное состояние физико-химических методов увеличения нефтеотдачи (литературно-патентный обзор). Екатеринбург: Средне-Уральское книжн. изд-во, 2021.
6. *Сулейманов Б.А.* Особенности фильтрации гетерогенных систем. Москва-Ижевск: ИКИ, 2006.
7. *Наугольных К.А.* Поглощение волн конечной амплитуды /Мощные ультразвуковые поля. М.: Наука, 1968.
8. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Нелинейная волновая механика и технологии. Волновые и колебательные явления в основе высоких технологий. М.: Ин-т комп. исслед., 2011.
9. *Samokhin A. V.* On Monotonic Pattern in Periodic Boundary Solutions of Cylindrical and Spherical Kortweg-de Vries-Burgers Equations // *Symmetry*. 2021. No. 13(2). P. 220–235.
10. *Зарембо Л.К.* Акустические течения / Мощные ультразвуковые поля. М.: Наука, 1968.
11. *Ахметзянов А.В., Самохин А.В.* Нелинейные волновые управляющие воздействия для увеличения нефтеотдачи природных залежей // *АиТ*. 2022. № 5. С. 61–75.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галляевым.*

Поступила в редакцию 16.04.2024

После доработки 20.06.2024

Принята к публикации 25.07.2024

© 2024 г. А.Д. ЦВИРКУН, д-р техн. наук (tsvirkun@ipu.rssi.ru),  
А.Ф. РЕЗЧИКОВ, чл.-корр. РАН (rw4cy@mail.ru),  
И.О. ДРАНКО, д-р техн. наук (olegdranko@gmail.com),  
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва),  
В.А. КУШНИКОВ, д-р техн. наук (kushnikoff@iptmuran.ru),  
А.С. БОГОМОЛОВ, д-р техн. наук (alexbogomolov@ya.ru),  
(Саратовский научный центр РАН)

## ОПТИМИЗАЦИОННО-ИМИТАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КРИТИЧЕСКИХ КОМБИНАЦИЙ ПАРАМЕТРОВ КОМПАНИЙ

Предлагается оптимизационно-имитационный метод определения комбинаций воздействий, позволяющих вывести организационно-техническую систему из потенциально неблагоприятного состояния. Решение показано на примере обратной задачи стресс-тестирования зрелых компаний традиционных отраслей реального сектора. Условием нахождения компании в потенциально неблагоприятном состоянии считается прогнозируемый отрицательный остаток денежных средств. Для определения изменений, улучшающих прогноз, методами математического программирования решается задача максимизации выгоды от таких изменений – разности прогнозируемого остатка денежных средств и затрат на изменения. Полученные результаты могут быть применены при решении вопросов стабилизации в условиях рисков: пандемии, экономических санкций, стихийных бедствий и др. Приводится модельный пример.

*Ключевые слова:* критическая комбинация событий, неблагоприятное состояние системы, стресс-тестирование, остаток денежных средств, кризис.

**DOI:** 10.31857/S0005231024100053, **EDN:** YUUFME

### 1. Введение

В настоящее время массированное санкционное давление подталкивает компании из различных секторов экономики к потенциально неблагоприятным состояниям. Ряд таких состояний можно рассматривать как предбанкротные, когда банкротство может прогнозироваться, но существуют ресурсы для того, чтобы его избежать. Сравнительно небольшие и незатратные воздействия, которые могут быть сделаны с использованием этих ресурсов, можно рассматривать как подталкивание системы в сторону относительно безопасных или нужных исследователю состояний. Это соображение перекликается с известной теорией подталкивания, основанной на работах Д. Канемана и А. Тверски [1, 2] и далее Р. Тейлера и К. Санстейна, [3–5]. В отечественных работах данное направление также не обходится вниманием [6, 7].

Однако в данной работе эти идеи рассматриваются не только в контексте влияния на поведение людей, но и для воздействия на состояния и поведение организационно-технических систем в целом. Другой ключевой тезис работы связан с тем, что отдельные воздействия должны быть по отдельности сравнительно не немасштабны и не затратны. Тезис состоит в том, что сила и результативность подталкиваний определяется не столько величиной затрачиваемых ресурсов, сколько подбором определенной комбинации, в которой эти ресурсы будут использоваться. Такие комбинации можно рассматривать в определенном смысле как критические, а достижение соответствующими параметрами определенных значений – как критические комбинации событий [8–10]. Задача определения критических комбинаций является далеко не тривиальной, для ее решения потребуются как математические методы и алгоритмы, так и эксперименты, которые должны проводиться с математическими моделями.

В результате искомые управляющие воздействия для этого должны быть направлены на синтез новой (обновленной) структуры и параметров компании. Обновления могут заключаться в смене поставщиков, потребителей, логистики и прочих мероприятиях собственными силами компании. В условиях рисков и ограниченных ресурсов такие мероприятия требуют предварительного моделирования. Если результаты моделирования показывают, что собственных сил недостаточно, требуется помощь государства в виде кредитов и субсидий. Для целесообразного распределения такой помощи, планирования ее вида и объема, также требуется решение комплексов задач по оптимизации и моделированию. В результате решения этих задач формируются рекомендации по целесообразному использованию компаниями, их группами и отраслями своих ресурсов для возможного уменьшения потенциальных убытков и, если это необходимо, по способу и размеру государственной помощи.

Ввиду того, что исследуемые системы имеют гибридную природу, являются большими и сложными, для решения обозначенных задач оказывается необходимым использование и разнородных комплексов моделей, включая не только аналитические, но и представленные отчасти в виде алгоритмов, правил, эвристик. Современные возможности информационных технологий позволяют достаточно оперативно осуществлять как аналитические, так и имитационные вычисления в этих комплексах. Такой подход составляет современную оптимизационно-имитационную парадигму [11, 12]. Представляется, что в условиях роста турбулентности исследуемых систем в ряде случаев целесообразно выходить из традиционной плоскости еще и в направлении привлечения моделей различной природы к решению одной и той же подзадачи, представляя итоговые результаты после их сравнения и обработки также в виде комплексов данных.

В оптимизационно-имитационной парадигме исследуются как крупномасштабные системы (промышленный комплекс [13], регион [14]), так и отдельные предприятия [15]. При этом в условиях кризисов значимость подхода возрастает ввиду новых вносимых переходными процессами неопределенностей

и вызовов [16]. Комбинированные оптимизационно-имитационные модели используются для анализа возможностей оптимизации деятельности предприятий в процессах слияния и поглощения [17], удаления неприбыльных предприятий из компаний [18].

Зарубежные исследователи также отмечают недостаточность для решения обозначенных задач использования жестких математических моделей, которые не следуют междисциплинарному подходу, для решения вопросов управления большими и сложными системами [9]. Так, прогнозирование банкротства компаний у ряда авторов предлагается делать с использованием моделей, основанных на глубоком обучении [20], гибридными методами роя частиц и опорных векторов [21, 22]. Такие модели призваны учесть, кроме прочего, различные юридические, поведенческие и экономические вопросы в условиях финансового кризиса.

Ниже предлагается постановка задачи определения комбинации сценариев, позволяющих вывести компанию из неблагоприятного по заданному показателю эффективности состояния, и подход к решению этой задачи с использованием комплекса имитационных задач и задач математического программирования.

## 2. Формальная постановка задачи

Предположим, что в качестве критерия эффективности деятельности компании за определенный период рассматривается величина  $S$ , прогноз значения которой  $S(X)$  на конец рассматриваемого периода может быть определен по известному алгоритму, применяемому к комплексу параметров и структуры  $X$ .

Например, в качестве такого показателя может рассматриваться остаток денежных средств на счете компании в конце этого периода. Такая величина отражает платежеспособность организации, что особенно актуально в условиях сложной макроэкономической ситуации. Пусть прогнозируемое значение величины  $S(X)$  не удовлетворяет ЛПП, например, прогнозируемый остаток денежных средств является отрицательным.

Требуется определить сценарии изменения параметров и структуры системы для увеличения значения  $S$ . При этом учитывается, что изменения параметров и структуры системы от  $X$  до  $X'$  потребуют определенных затрат, обозначаемых как  $R(X, X')$ . Поэтому возможность и целесообразность проведения мероприятий зависит от того, допускаются ли такие затраты имеющимися ограничениями и того, насколько соответствующий прирост  $S$  превысит эти затраты. Таким образом, требуется найти такую структуру системы и значения параметров  $X'$ , при которых

$$(1) \quad S(X') - R(X, X') \longrightarrow \max,$$

где  $S(X')$ ,  $R(X, X')$  – аналитически или алгоритмически заданные функционалы: прогноз значения  $S$  для системы с параметрами и структурой  $X'$  и

затраты на мероприятия по изменению структуры и параметров компании от  $X$  до  $X'$  соответственно. Ограничения задачи:

$$(2) \quad R(X, X') \leq R,$$

$$(3) \quad y_i(X) = 0, \quad i \in I,$$

$$(4) \quad S(X') - R(X, X') > 0,$$

где  $R$  – величина, ограничивающая ресурсы на изменение параметров и структуры системы,  $y_i(X)$  – связи между параметрами и структурой  $X$ , заданные в аналитическом или в алгоритмическом виде, а условие (4) означает целесообразность искомых мероприятий.

### 3. Математическая модель для решения

Пусть в результате системного анализа схемы расчета финансово-экономических показателей компании выделена совокупность управляющих параметров  $X_1, \dots, X_n$ , определяющих  $S$  – прогноз целевого показателя деятельности компании:

$$(5) \quad S = F(X_1, \dots, X_n),$$

где  $F(X_1, \dots, X_n)$  выражает прогнозное значение остатка денежных средств.

Предположим далее, что параметры  $X_1, \dots, X_n$  доступны для изменения с коэффициентами в интервалах  $K_1, \dots, K_n$ . Эти интервалы предполагаем достаточно малыми, поэтому соответствующие изменения могут быть проведены практически одновременно, влияние времени, которое потребуется в текущем состоянии системы на эти изменения, несущественно.

Исследуется возможность улучшения (далее будем говорить – увеличения, как в случае остатка денежных средств)  $S$  путем изменений  $X_1, \dots, X_n$  в указанных интервалах. В частности, если прогнозируемое значение  $S$  отрицательно, то требуется предпринять меры для предотвращения потенциального банкротства. Обозначим через  $X_1^*, \dots, X_n^*$  измененные значения показателей  $X_1, \dots, X_n$ . Прогнозируемое значение показателя остатка денежных средств обозначим через  $S^*$  и представим в виде

$$(6) \quad S^* = S + Z(X_1^*, \dots, X_n^*) - R(X_1^*, \dots, X_n^*),$$

где  $S$  – начальное прогнозируемое значение целевого показателя, а функции  $Z(X_1^*, \dots, X_n^*)$  и  $R(X_1^*, \dots, X_n^*)$  выражают его прирост благодаря принятым изменениям и затраты, связанные с этими изменениями.

Представим измененные значения в виде  $X_i^* = k_i X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Если  $k_i > 1$ , то значение  $X_i$  увеличивается на  $100(k_i - 1)$  процентов в результате принятых мер, если  $k_i < 1$ , то значение  $X_i$  уменьшается на  $100(1 - k_i)$  процентов. При  $k_i = 1$  значение  $X_i$  не меняется. Далее величины  $k_1, \dots, k_n$  будут рассматриваться как переменные задачи оптимизации, а аргументы функций  $Z$  и  $R$  будем записывать как  $(X_1, \dots, X_n, k_1, \dots, k_n)$ .

Требуется определить такие допустимые значения  $k_1, \dots, k_n$ , что значение  $S^*$ , определяемое по (6), превысит текущее значение  $S$  и будет максимальным при заданных ограничениях, что означает максимальную выгоду от принимаемых мер. Критическими комбинациями будем считать такие подмножества множества параметров  $X_1, \dots, X_n$ , коэффициенты изменения которых в найденных решениях будут отличны от 1.

Содержательно задача может быть сформулирована следующим образом. Допустим, в процессе функционирования компания перешла в состояние, которое является потенциально неблагоприятным с точки зрения ЛППР (например, прогнозируется отрицательный остаток денежных средств на счету, что ведет к банкротству организации). Необходимо принять меры по переводу компании в другое, более благоприятное состояние, максимизируя при этом критерий выгоды (6) с учетом имеющихся ограничений.

Рассматриваемая задача может быть поставлена и решена как задача математического программирования [22, 23] с неотрицательными переменными  $k_1, \dots, k_n$ . Во введенных выше обозначениях требуется при заданных  $X_1, \dots, X_n$ ,  $S = F(X_1, \dots, X_n)$ , функциях  $Z(X_1, \dots, X_n, k_1, \dots, k_n)$ ,  $R(X_1, \dots, X_n, k_1, \dots, k_n)$  найти максимум функции:

$$(7) \quad S^* = S + Z(X_1, \dots, X_n, k_1, \dots, k_n) - R(X_1, \dots, X_n, k_1, \dots, k_n) \longrightarrow \max,$$

при ограничениях

$$(8) \quad Z(X_1, \dots, X_n, k_1, \dots, k_n) - R(X_1, \dots, X_n) \leq 0,$$

$$(9) \quad k_i \in K_i,$$

$i = 1, \dots, n$ , и условием связи между изменениями

$$(10) \quad Y(k_1, \dots, k_n),$$

где  $Y(k_1, \dots, k_n)$  – предикат, выражающий возможные зависимости между искомыми изменениями и обуславливающийся составом, структурой и ресурсами исследуемой системы.

*Замечание 1.* Фактически решается задача повышения прогнозируемого остатка денежных средств. При этом выделим следующие варианты:

–  $S < 0$ ,  $S^* \leq 0$  – определяем изменения параметров, которые позволят прогнозировать максимально выгодный положительный остаток;

–  $S < 0$ ,  $S^* < 0$  – в условиях имеющихся ограничений не найдены меры по выходу к положительному прогнозу остатка денежных средств, однако есть возможность определить изменения параметров, которые позволят прогнозировать минимальные потери, оценить «масштаб бедствия» и размер необходимых субсидий при условии реализации таких мер;

–  $S > 0$ ,  $S^* > 0$  – отрицательный остаток денежных средств не прогнозируется изначально, но целесообразно определить возможные меры по его повышению в условиях имеющихся ограничений.

*Замечание 2.* Решение задачи (7)–(10) не будет существовать в случае, если условия задачи не совместимы между собой, т.е. множество допустимых планов пусто. В этом случае для дальнейшего использования предлагаемых результатов ЛПР целесообразно изменить множество рассматриваемых параметров  $X_1, \dots, X_n$  или ограничения задачи.

Если же решение задачи (7)–(10) существует, но не единственно, то предполагается осуществлять выбор реализуемого варианта изменения параметров с помощью дополнительных критериев, экспертных заключений и соображений прозрачности, объяснимости мер, которые будут предприниматься для этого варианта изменений. При этом может быть проведена проверка выбираемых решений на устойчивость и при необходимости – регуляризация [24–27].

#### 4. Подход к решению задачи

Предлагаемый подход заключается в выполнении следующих действий:

1. Анализ состояния предприятия и выявление резервов для изменения параметров и структуры  $X$ . Результатом этого этапа должен являться перечень управляющих параметров  $x_1, \dots, x_n$ , влияющих на значение  $S$ , и соотношения, связывающие эти параметры помимо их вхождения в алгоритм определения  $S$ .
2. Определение границ возможных изменений рассматриваемых параметров на основании результатов вычислительных экспериментов с учетом установленных связей и условий (2)–(4).
3. Решение задачи оптимизации (1)–(4).
4. Определение возможных сценариев для изменений, определенных в результате предыдущего пункта, с учетом ретроспективных данных и экспертных заключений. Анализ возможности совмещения сценариев, соответствующих решениям для различных подмножеств  $X_1, \dots, X_n$ , для достижения максимума (1) на всех параметрах и структурах из  $X$ .
5. Передача информации ЛПР о полученных решениях исходной задачи или отсутствии таких решений в заданных условиях.

#### 5. Предлагаемый алгоритм решения

Метод определения критических комбинаций изменений заключается в следующем:

1. Выделить  $X_1, \dots, X_m$  – доступные для изменения параметры компании, влияющие на значения прогноза в виде (1) и метод определения значения прогноза целевого показателя  $S$  из значений  $X_1, \dots, X_m$ , определить значение  $S$ .
2. Определить  $K_1, \dots, K_n$  – множества возможных значений коэффициентов  $k_1, \dots, k_n$  изменения параметров  $X_1, \dots, X_m$ . Верхняя граница  $K_i$

в общем случае оценивается в результате имитационного моделирования возможных мероприятий, увеличивающих значение  $X_i$ , с учетом условия (2), нижняя граница  $K_i$  – аналогично с мероприятиями, уменьшающими  $X_i$ .

3. Определить функцию  $Z(X_1, \dots, X_n, k_1, \dots, k_n) = R(X_1, \dots, X_n)$ , позволяющую получить по формуле (6) новое прогнозируемое значение целевого показателя.
4. Решить задачу поиска максимума целевой функции (7) от переменных  $k_1, \dots, k_n$  при ограничениях (7)–(10) методами математического программирования. Для каждого такого решения подмножество переменных  $X_1, \dots, X_m$  с соответствующими неединичными коэффициентами будем рассматривать как один из вариантов искомой критической комбинации параметров.
5. Передать ЛПР информацию обо всех найденных критических комбинациях или о том, что решения в заданных условиях не найдено. Предлагаемый подход к определению критической комбинации параметров для решения обратной задачи стресс-тестирования компании предполагает, что ЛПР имеет алгоритмы или предпочтения для выбора критической комбинации изменений параметров в случае, если решение задачи дает несколько вариантов таких комбинаций. Таким критерием может быть количество единичных значений в некоторой части искомого набора  $k_1^*, \dots, k_n^*$ , в случае, если желательно изменять в этой части минимальное количество показателей, и др. Также подразумевается, что ЛПР имеет возможность определить комплексы мероприятий по реализации выбранных изменений параметров предприятия.

Применение предлагаемого подхода будет показано на примере.

## 6. Модельный пример

Перейдем к конкретизированной постановке и решению задачи на примере одного из предприятий обрабатывающей промышленности, далее – Завод. Прогноз отчетности и расчеты при стресс-тестировании были сформированы в предположении равенства выручки прогноза и факта на 2021 г. Отметим, что данное исследование формировалось на основании отчетности Завода, носит модельный характер, и напрямую не связано с внутренней программой антикризисных мероприятий.

Переменная времени далее опускается, так как в примере рассматривается одношаговое управление.

Для определения величины и стоимости изменений параметров компании используем публикации, основанные на комплексе консультационных работ по развитию российских организаций [28–30], которые показывают, что практически во всех организациях есть возможности развития с высокой результативностью.

Для формирования выражения в левой части условия (7) и затем (8) воспользуемся результатами, полученными в [31]. В этой работе для зрелых сформировавшихся организаций предлагается модель прогнозирования финансового состояния, которая позволяет записать выражение в левой части (7) для организаций с возможностью быстрой перестройки производства как

$$(11) \quad S = S_0 + (V(1 - v) - FC - r_D D)(1 - k_\tau)(1 - k_u) - \\ - (\Delta FA + \Delta Inv + \Delta AR - \Delta AP) + \Delta D,$$

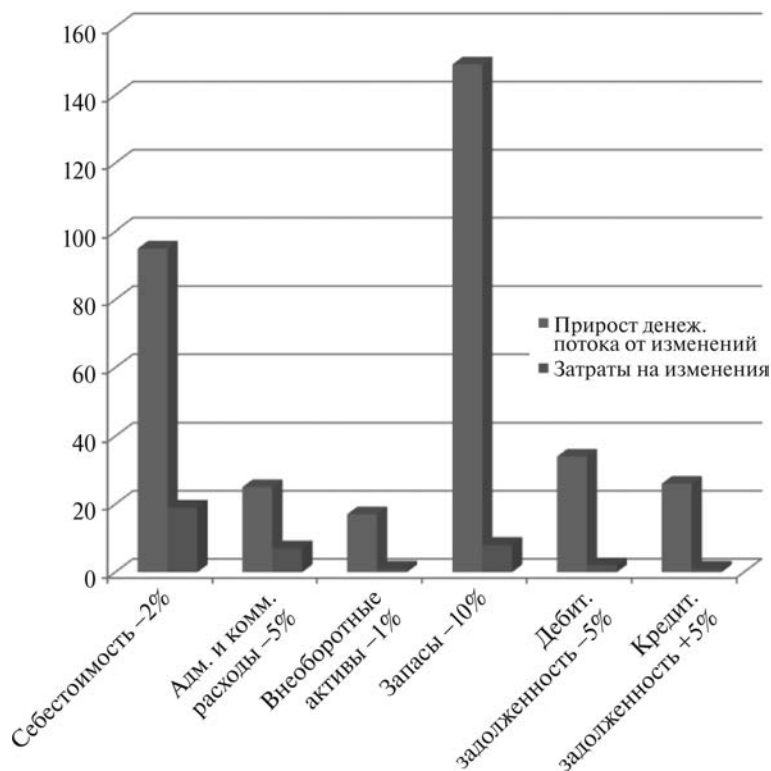
где  $S$  – прогнозируемый остаток денежных средств на конец периода,  $S_0$  – остаток денежных средств на начало периода,  $V$  – выручка,  $v$  – доля переменных затрат,  $FC$  – постоянные затраты без процентов,  $r_D$  – процент долга к уплате,  $D$  – размер долга компании,  $k_\tau$  – ставка налога на прибыль,  $k_u$  – доля чистой прибыли на потребление (дивиденды),  $\Delta FA$ ,  $\Delta Inv$ ,  $\Delta AR$ ,  $\Delta AP$ ,  $\Delta D$  – прирост внеоборотных активов, запасов, дебиторской, кредиторской задолженности и долга компании соответственно. Значения рассматриваются в момент прогнозирования значения целевого показателя на конец рассматриваемого периода.

Далее, если ввести обозначения  $k_{\tau u} = (1 - k_\tau)(1 - k_u)$ ,  $l_{TC1} = l_{Inv} - l_{AP}$ ,  $l_{TC} = k_{Inv}l_{Inv} = k_{AP}l_{AP}$ , соотношение (6) может быть представлено в виде

$$(12) \quad S^* = S + (k_D - 1)D - k_{FA}FA + V(k_{\tau u} - k_{AR}l_{AR} - l_{TC}v) - \\ - (k_{FC}FC + k_D r_D D)r_{\tau u} - l_{TC}FC + l_{AR}V + l_{TC1}TC,$$

где  $TC$  – полные затраты (без процентов по кредитам),  $VC$  – условно-переменные затраты,  $FC$  – условно-постоянные затраты,  $l_{Inv}$  – срок оборачиваемости запасов (Inventory),  $k_v$  – коэффициент изменения переменных расходов,  $k_{Inv}$  – коэффициент изменения запасов,  $k_{AR}$  – коэффициент изменения дебиторской задолженности (Accounts Receivable),  $l_{AR}$  – срок оборачиваемости дебиторской задолженности,  $k_{AP}$  – коэффициент изменения кредиторской задолженности (Accounts Payable),  $l_{AP}$  – срок оборачиваемости кредиторской задолженности.

Для уточнения задачи оптимизации определим параметры, которые могут подвергаться изменениям, и возможные границы этих изменений (условие (9)). Параметры, изменение которых может быть целесообразно: выручка, себестоимость, административные и коммерческие расходы, внеоборотные активы, запасы, дебиторская и кредиторская задолженности. Рассматриваемый диапазон изменения всех этих параметров возьмем 10%. Решение задачи оптимизации показывает, что в этих пределах могут быть выбраны изменения, затраты на которые достаточно малы по сравнению с положительным эффектом от них (рисунок). На этом рисунке прирост от изменений и затраты на них отложены по вертикальной оси и выражаются в млн руб. После названия каждой переменной указано ее изменение, полученное при решении задачи оптимизации.



Затраты и эффект изменения параметров предприятия.

Полученное решение позволяет дать положительный прогноз остатка денежных средств согласно построенной в [31] модели при условии выполнения мероприятий по указанным изменениям. Как показывают расчеты, значение целевой функции в рассматриваемом примере до применения изменений мероприятий составит  $S = 21$  млн руб., а после применения этих мер новое значение будет  $S^* = 455$  млн руб.

Таким образом, показана возможность применения предлагаемого подхода для определения мер по выводу прогнозируемого остатка денежных средств компании в область положительных значений. Отметим, что при рассмотрении существенных зависимостей между возможными изменениями параметров предлагаемый подход может столкнуться с задачами нелинейной, в том числе невыпуклой оптимизации. С этим может быть связано ограничение его применения с силу ограничений методов, разработанных для решения таких задач.

## 7. Заключение

В статье исследуется вопрос определения сравнительно небольших изменений параметров, которые позволяют перевести организационно-техническую систему из потенциально неблагоприятного состояния в область, где рассматриваемые показатели имеют благоприятный прогноз. Предлагаемый подход

к решению задачи позволяет выделить подмножество таких параметров (критическую комбинацию параметров) и необходимый объем их изменения. При этом выбирается вариант, наиболее целесообразный с точки зрения затрат на искомые изменения. Для использования подхода должна быть известна функциональная зависимость прогноза интересующего показателя от рассматриваемого множества параметров. В этом случае задача сводится к задаче математического программирования. В качестве прогнозируемого показателя в рассматриваемом примере берется остаток денежных средств компании. Предлагаемый подход позволяет определить сравнительно небольшие допустимые изменения параметров компании, которые позволят увеличить прогнозируемый остаток денежных средств на счете компании, и в частности вывести компанию к большему значению этой величины. В частности к положительному значению, если прогнозировалось банкротство. При этом необходимые меры ищутся из соображений максимальной выгоды с учетом затрат.

Полученные результаты решения обратной задачи стресс-тестирования предназначены в перспективе для периодического применения на временных интервалах различной длительности с коррекцией условий и допущений на каждом из них. Для этого в продолжении исследования будут разработаны основные положения по распространению предлагаемого подхода на управление в несколько шагов. Кроме того, заслуживает внимание вопрос организации целесообразной последовательности вносимых изменений.

Управляющие воздействия для таких изменений в общем случае зависят от данных по прошлым периодам и от желаемых или ожидаемых данных по предстоящим периодам.

Как перспективу для исследования отметим, что рассмотренная в примере обратная задача стресс-тестирования может решаться сразу для множества компаний и корпораций различных отраслей. Такое решение может быть использовано для выявления компаний, поддержка которых государством в условиях пандемии, турбулентности и международных санкций наиболее целесообразна для сохранения стабильной работы этих отраслей. При этом будут определяться необходимые объемы такой поддержки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kahneman D., Tversky A.* Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // *Econometrica*. XLVII (1979). P. 263–291.
2. *Kahneman D., Tversky A.* Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty // *J. Risk Uncertain.* 1992. No. 5. P. 297–323.
3. *Sunstein C., Thaler R.* Libertarian Paternalism is Not an Oxymoron // *Univer. Chicago Law Rev.* 2003. No. 70. P. 1159–1202.
4. *Thaler R., Sunstein C.* Nudge: improving decisions about health, wealth, and happiness. Soundview Executive Book Summaries. Norwood: Mass. 2010.
5. *Талер Р.* Архитектура выбора. Как улучшить наши решения о здоровье, благосостоянии и счастье / М.: Манн, Иванов и Фербер, 2017.

6. *Журба М.В.* Критический взгляд на теорию подталкивания // Экономические исследования и разработки. 2017. № 8. С. 213–222.
7. *Жильцов В.А., Пахомов А.П.* «Nudge» – теория «мягкого подталкивания» // Вост.-европ. науч. журн. Т. 11. № 3. 2016. С. 129–137.
8. *Богомолов А.С.* Анализ путей возникновения и предотвращения критических сочетаний событий в человекомашинных системах // Изв. Саратов. ун-та. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17. № 2. С. 219–230.
9. *Богомолов А.С., Иващенко В.А., Кушников В.А. и др.* Моделирующий комплекс для анализа критических сочетаний событий в авиационных транспортных системах // Проблемы управления. 2018. № 1. С. 74–79.
10. *Резчиков А.Ф., Кушников В.А., Богомолов А.С. и др.* Математические модели и методы анализа выполнимости планов управления сложными системами в условиях критических комбинаций событий. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2023. 128 с.
11. *Цвиркун А.Д., Акинфеев В.К., Филиппов В.А.* Имитационное моделирование в задачах синтеза структуры сложных систем. Оптимизационно-имитационный подход. М.: Наука, 1985. 173 с.
12. *Антонова Г.М., Цвиркун А.Д.* Оптимизационно-имитационное моделирование для решения проблем оптимизации современных сложных систем управления // Проблемы управления. 2005. № 5. С. 19–27.
13. *Арутюнов А.Л.* Синтез оптимизационно-имитационных моделей структуры использования различных видов энергоресурсов в производственном цикле АПК // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2013) : Материалы международной конференции. 2013. С. 272–278.
14. *Семущина Е.И.* Оптимизационно-имитационное моделирование как инструмент анализа социально-экономического развития региона // Научный ежегодник Центра анализа и прогнозирования. 2017. № 1. С. 247–249.
15. *Бабина О.И.* Разработка оптимизационной имитационной модели для поддержки процессов планирования складских систем // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т. 6, № 2. С. 295–307.
16. *Васильев С.Н., Цвиркун А.Д.* Проблемы управления развитием крупномасштабных систем в условиях кризиса // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2009): Материалы международной конференции. 2009. С. 14–18.
17. *Горошников Т.А.* Оптимизационная модель и алгоритмы поиска оптимального решения для анализа эффективности удаления неприбыльных предприятий из компании // Управление большими системами: сборник трудов. 2012. № 36. С. 173–185.
18. *Горошников Т.А., Слюков А.В.* Оптимизационные модели анализа эффективности слияний и поглощений // Управление большими системами. 2010. № 31. С. 177–191.
19. *Nwogugu M.* Decision-making, risk and corporate governance: New dynamic models/algorithms and optimization for bankruptcy decisions // Appl. Math. Comput. 2006. V. 179. No. 1. P.386–401.
20. *Elhoseny M. et al.* Deep Learning-Based Model for Financial Distress Prediction // Annals of operations research. 2022.

21. *Lu Y., Zeng N., Liu X.* A New Hybrid Algorithm for Bankruptcy Prediction Using Switching Particle Swarm Optimization and Support Vector Machines // *Discrete dynamics in nature and society*. 2015. 294930.
22. *Sen Z., Li Y., Yang W. et al.* A Financial Distress Prediction Model Based on Sparse Algorithm and Support Vector Machine // *Mathematical Problems in Engineering*. 2020(4). P. 1–11.
23. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Физматлит, 2004.
24. *Рыбкин В.А., Язенин А.В.* Возможностная регуляризация задач линейного программирования // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2003. № 3. С. 80–89.
25. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Ячмимович М.* Нормальное решение и регуляризация задач линейного программирования. В сб. «Динамика неоднородных систем» под ред. Ю.С. Попкова, 2004. С. 107–135.
26. *Федоров В.В.* К вопросу об устойчивости задачи линейного программирования // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1975. Т. 15. № 6. С. 1412–1423.
27. *Ашманов С.А.* Условия устойчивости задач линейного программирования // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1981. Т. 21. № 6. С. 1402–1410.
28. *Дранко О.И.* Эмпирический вид производственной функции предприятия // *Экономика и менеджмент систем управления*. 2014. №. 3.2 (13). С. 245–253.
29. *Ириков В.А. и др.* Разработка программы инновационного развития предприятия: Методика, практика, рекомендации по внедрению. М.: Логос, МЗ-Пресс, 2013.
30. *Балашов В.Г., Ириков В.А., Токарев В.Д.* Опыт реформирования: четырехкратный рост и техперевооружение. Трехлетний опыт ОАО «Салаватстекло». М.: Книга сервис, 2002.
31. *Богомолов А.С., Дворяшина М.М., Дранко О.И. и др.* Стресс-тестирование нефинансовых организаций: подход к обратной задаче на основе аналитического решения // *Проблемы управления*. 2021. № 6. С. 15–29.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.*

Поступила в редакцию 07.06.2024

После доработки 20.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024

© 2024 г. А.Д. ЦВИРКУН, д-р техн. наук (tsvirkun@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
А.С. БОГОМОЛОВ, д-р техн. наук (bogomolov@iptmuran.ru)  
(Саратовский научный центр РАН),  
О.И. ДРАНКО, д-р техн. наук (olegdranko@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
В.А. КУШНИКОВ, д-р техн. наук (kushnikoff@iptmuran.ru),  
М.С. ПОЛЯКОВ (maxg6000@mail.ru)  
(Саратовский научный центр РАН),  
А.Ф. РЕЗЧИКОВ, чл.-корр. РАН (rw4cy@mail.ru),  
И.А. СТЕПАНОВСКАЯ, канд. техн. наук (irstepan@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## МОДЕЛИ СИСТЕМНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ДОРОЖНО-ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМОЙ МЕГАПОЛИСА

Предлагается комплекс системно-динамических моделей для управления дорожно-транспортной системой мегаполиса с учетом показателей безопасности движения. Основные показатели дорожно-транспортной системы определены в соответствии со Стратегией безопасности дорожного движения в Российской Федерации на 2018–2024 гг., а также на основе нормативно-правовых документов Госавтоинспекции МВД России для города Москвы. Результаты работы предназначены для совершенствования математического обеспечения систем управления дорожно-транспортным движением крупных городов.

*Ключевые слова:* модель системной динамики, дорожно-транспортная сеть, управление, безопасность движения.

**DOI:** 10.31857/S0005231024100064, **EDN:** YURMJD

### 1. Введение

В соответствии со Стратегией безопасности дорожного движения в РФ [1] перспективным направлением развития дорожно-транспортных систем мегаполисов является применение интеллектуальных систем управления дорожным движением. Основная цель функционирования таких крупномасштабных систем заключается в обеспечении требуемого уровня основных показателей безопасности дорожного движения (далее – показателей) (рис. 1).

Величину и динамику этих показателей учитывают при развитии транспортной инфраструктуры мегаполисов, планировании деятельности федеральных и муниципальных органов власти, разработке мероприятий по снижению дорожно-транспортной аварийности и травматизма, анализе причин возникновения дорожно-транспортных происшествий, разработке и обосновании градостроительных решений, планировании деятельности компаний, занимающихся автострахованием, и др.



Рис. 1. Показатели безопасности дорожного-транспортного движения [1].



Рис. 2. Динамика количества погибших в дорожно-транспортных происшествиях на территории России в течение года [2].

Важной проблемой, затрудняющей развитие дорожно-транспортной системы России и сдерживающей применение концепции интеллектуальных систем управления дорожным движением на территории ее мегаполисов, является достаточно высокий уровень аварийности на дорогах страны и связанное с ней значительное количество погибших в дорожно-транспортных происшествиях (рис. 2).

Один из путей повышения безопасности дорожно-транспортного движения связан с разработкой и улучшением моделей и алгоритмов систем поддержки принятия решений по организации дорожного движения.

Теоретическое обоснование принципов функционирования крупномасштабных систем поддержки принятия решений междисциплинарной природы, широко используемых при интеллектуальном управлении дорожно-транспортным движением, было осуществлено в трудах ряда крупных отечественных и зарубежных ученых, таких как Н.П. Бусленко, С.Н. Васильев, А.Дж. Вильсон, Ю.Б. Гермейер, К.Ф. Даганцо, Х. Иносэ, Д.А. Новиков, А.Ф. Резчиков, Т. Хамада, А.Д. Цвиркун и др. В результате практического применения полученных результатов были созданы и успешно функционируют эффективные средства мониторинга и управления дорожным движением, в том числе в современных мегаполисах. Развитие таких систем поддерживается исследованиями по многим различным аспектам проблемы безопасности дорожного движения в России и за рубежом [3–9]. Однако при этом не отмечается публикаций о российских комплексах мониторинга и управления динамикой показателей безопасности дорожно-транспортных систем городов в их сложном взаимосвязанном комплексе. Недостаточная проработанность теоретических аспектов создания математического обеспечения для таких интеллектуальных систем управления уменьшает точность прогноза основных показателей дорожно-транспортного движения, снижает оперативность и качество принимаемых решений. Это обстоятельство обуславливает практическую значимость темы работы.

## **2. Задача управления дорожно-транспортной системой мегаполиса**

При формировании критерия эффективности решаемой задачи, характеризующего величину потерь от нарушения безопасности дорожного движения в мегаполисе, возникает ряд проблем. Основные из них связаны с трудноформализуемым влиянием человеческого фактора, высокой размерностью решаемых задач, невозможностью или невоспроизводимостью натуральных экспериментов. Тут же характерны и известные затруднения в полном формальном описании перечней и отдельных факторов потерь, связанных с нарушениями безопасности большой и сложной системы (дорожного движения в данном случае), выявлением удовлетворительного набора управляющих переменных и возмущений и др. В связи с этим при разработке постановки задачи были приняты допущения, которые, по мнению авторов, достаточно часто выполняются в процессе функционирования дорожно-транспортной системы мегаполиса.

1) Рассматриваются регулярно или довольно часто повторяющиеся ситуации, влияющие на безопасность дорожно-транспортного движения (например, изменение состояния дорог в осенне-зимний период, аварийные ситуации, возникающие из-за невнимательности пешеходов или водителей).

2) При ограничениях по времени и другим ресурсам достичь снижения потерь можно за счет более оперативных и качественных управленческих решений, которые формулируются в виде комплексов мероприятий (планов).

3) У лиц, принимающих решения в области безопасности дорожного движения мегаполиса, имеется обоснованное мнение о желаемых ориентировочных значениях показателей. Эти значения могут варьироваться в некоторых пределах в зависимости от ситуационного контекста, динамики в соседних и аналогичных регионах. Базовые же усредненные значения показателей выбираются на основе экспертного опыта и существующих нормативов. Далее будем называть их рекомендованными значениями показателей.

4) Ущерб от нарушения безопасности зависит от взвешенной суммы отклонений показателей  $X_i^*$ ,  $i = \overline{1, n}$ , от рекомендованных значений  $X_i^*(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Предполагаем, что с ростом отклонений  $X_i^* - X_i(t, p(t))$  возрастает ущерб жителям, автотранспортным средствам, объектам инфраструктуры и другие затраты на функционирование дорожно-транспортной системы мегаполиса.

5) Лица, принимающие решения, имеют несколько альтернативных решений по повышению безопасности функционирования дорожно-транспортной системы, для каждого из которых построен план мероприятий  $p(t) \in P$  по реализации этого решения. Каждый из этих планов предполагает определенные затраты, которые должны укладываться в имеющиеся ресурсные ограничения.

С учетом указанных допущений можно представить задачу выбора плана, при котором достигается минимум целевой функции, равной взвешенной сумме квадратов отклонений показателей от рекомендованных значений. Это требование отражено в условии (1).

Условия (2) и (3) отражают ограничения на скорости и границы изменения переменных. Эти ограничения устанавливаются на основе анализа причинно-следственных связей в рассматриваемой области и с учетом смысла задачи.

В условиях сказанного задача может иметь следующую формулировку.

Разработать математические модели и методы управления дорожно-транспортной системой мегаполиса, позволяющие на отрезке времени  $t \in [t_0; t_N]$  определить план мероприятий  $p(t) \in P$ , который минимизирует рассматриваемую целевую функцию

$$(1) \quad Z(p(t)) = \int_{t_0}^{t_N} \sum_{i=1}^n (X_i^* - X_i(t, p(t)))^2 \gamma_i dt \rightarrow \min,$$

при ограничениях:

$$(2) \quad \frac{dX_i(t)}{dt} = f_i(t, X_1(t), \dots, X_n(t), p(t)), \quad i = \overline{1, n},$$

$$X_i(t_0) = X_{i0}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$(3) \quad \forall t \in [t_0; t_N] X_i^{\min} \leq X_i(t, p(t)) \leq X_i^{\max}, \quad i = \overline{1, n},$$

и граничных условиях:

$$F_i^{t_0}(X, X', p) = 0, \quad F_j^{t_N}(X, X', p) = 0, \quad i = \overline{1, k_1}, \quad j = \overline{1, k_2},$$

$X_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и  $X_i^*$  – показатели и их рекомендованные значения соответственно;  $\gamma_i$  – весовые коэффициенты;

$X_i^{\min}$ ,  $X_i^{\max}$  – минимальное и максимальное значение показателя соответственно.

*Подход к решению задачи.* При решении задачи (1)–(3) в качестве управляющей модели используем уравнения системной динамики. При их формировании известная динамическая модель

$$(4) \quad \frac{dI_j(t)}{dt} = F_j(I_1, \dots, I_n), \quad j = \overline{1, n},$$

интерпретируется как

$$(5) \quad \frac{dI_j(t)}{dt} = \alpha_{j,0} + \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} \prod_l \omega_{j,k,l}(I_l) I_k, \quad j = \overline{1, n}.$$

Правомерность перехода от (4) к (5) объясняется следующим образом. Если сравнение собранной статистической информации с расчетными значениями покажет, что система (5) описывает объект управления с требуемой точностью, то она может использоваться при решении поставленной задачи. Обширный опыт применения системно-динамического подхода [10–14] показал, что системами вида (5) описывается достаточно широкий класс различных явлений.

### 3. Математическая модель

Математические модели строятся для всех планов мероприятий  $p(t)$ . Основные этапы построения модели показаны на схеме, рис. 3.

Списки показателей крупномасштабной системы (рис. 1) насчитывают многие сотни наименований, их подробный анализ вряд ли целесообразно проводить в рамках одной статьи. Поэтому, не теряя общности, рассмотрим в качестве таких показателей представленные в табл. 1.

Показатели выбраны на основе экспертного анализа Стратегии [1] с учетом наличия открытых и достоверных данных по этим показателям за несколько лет [2]. Внешние факторы, влияющие на безопасность дорожного движения, учитываются в работе как возмущения (табл. 2). Эти факторы были выбраны на основе анализа результатов опроса участников дорожного движения в крупных городах РФ.

Для рассматриваемых переменных и возмущений строятся дифференциальные уравнения вида

$$(6) \quad \frac{dX(t)}{dt} = X^+(t) - X^-(t).$$

( $X^-(t)$ ,  $X^+(t)$  – отрицательные и положительные темпы изменения переменной.)



Рис. 3. Этапы разработки модели.

Допускается мультипликативное представление влияния факторов:

$$(7) \quad X^{\pm}(t) = f(F_1(t), F_2(t), \dots, F_k(t)) = f_1(F_1(t))f_2(F_2(t)) \dots f_k(F_k(t)),$$

где  $F_1, \dots, F_k$  – факторы (переменные или внешние воздействия).

В работе допускается, что переменные системы носят количественный характер. Тогда при расчетах могут быть использованы их нормированные значения:

$$(8) \quad X_i^*(t) = \frac{X_i(t)}{X_i^{norm}}, \quad i = 1, \dots, 17,$$

( $X_i^{norm}$  – коэффициент нормировки). Нормирование позволяет избежать несоответствий размерностей различных показателей системы и улучшить

**Таблица 1.** Основные показатели безопасности дорожно-транспортной системы, количество в год

Переменная	Обозначение
ДТП на автомобильных дорогах общего пользования	$X_1(t)$
ДТП на железнодорожных переездах	$X_2(t)$
ДТП, с места совершения ТС скрылись	$X_3(t)$
ДТП, с места совершения водитель скрылся, ТС на месте	$X_4(t)$
ДТП с неустановленными ТС	$X_5(t)$
ДТП с пострадавшими водителями	$X_6(t)$
ДТП с пострадавшими пассажирами	$X_7(t)$
ДТП с пострадавшими пешеходами	$X_8(t)$
ДТП с участием детей до 18 лет	$X_9(t)$
ДТП в населенных пунктах	$X_{10}(t)$
ДТП с пешеходами в состоянии опьянения	$X_{11}(t)$
ДТП из-за нарушения водителями легковых автомобилей	$X_{12}(t)$
ДТП из-за нарушения водителями 16–18 лет	$X_{13}(t)$
ДТП из-за нарушения водителями-мужчинами	$X_{14}(t)$
ДТП из-за нарушения водителями-женщинами	$X_{15}(t)$

**Таблица 2.** Возмущения, влияющие на основные показатели безопасности

Внешний фактор	Обозначение
Кол-во транспортных средств старше 10 лет	$G_1(t)$
Степень износа транспортных средств	$G_2(t)$
Количество комплексов фото-видео фиксации нарушений	$G_3(t)$
Количество выданных водительских удостоверений	$G_4(t)$
Протяженность участков дорог	$G_5(t)$
Средний штраф за нарушение ПДД	$G_6(t)$

сопоставимость их величин. Если переменные и возмущения измеряются качественно, то для перехода к количеству может быть использован аппарат теории нечетких множеств.

Для отображения причинно-следственных связей динамики показателей аналогично [15] строится матрица и граф (см. рис. 4).

$$U_{i,j} = \begin{cases} -, & \text{увеличение переменной } X_j \text{ или внешнего фактора } G_j \text{ приводит} \\ & \text{к уменьшению } X_i, \\ 0, & \text{переменная } X_j \text{ или внешний фактор } G_j \text{ не влияют на } X_i, \\ +, & \text{увеличение переменной } X_j \text{ или внешнего фактора } G_j \text{ приводит} \\ & \text{к увеличению } X_i, \\ P_i, & \text{влияние } X_j \text{ на увеличение или уменьшение } X_i \text{ определяется си-} \\ & \text{стемой условий.} \end{cases}$$

На основе анализа текущих данных предметной области были приняты значения  $Pr_1 = 1$ ;  $Pr_2 = 1$ ;  $Pr_3 = -1$ .

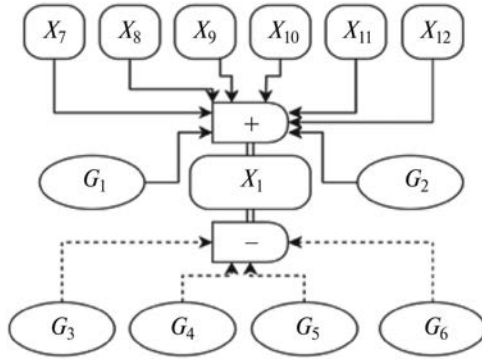


Рис. 4. Подграф для переменной  $X_1$ .

Дуги графа определяют причинно-следственные отношения между переменными. На рис. 4 изображена вершина графа для  $X_1$ .

По матрице и графу причинно-следственных связей строятся уравнения системной динамики:

$$(9) \quad \frac{dX_i}{dt} = \frac{1}{X_i^{norm}} \left( \prod_{i,j} f_{i,j}(X_j^+) \times \sum_m G_m^+ - \prod_{i,k} f_{i,k}(X_k^-) \times \sum_n G_n^- \right).$$

Выражения вида  $f_{A,B}(X_B)$  обозначают здесь зависимости  $X_A$  от  $X_B$ , которые устанавливаются с использованием регрессионного анализа.

Определенные указанным выше способом функциональные зависимости подставляются в (9), задаются начальные условия, и полученная система дифференциальных уравнений решается одним из численных методов, например Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Полученные результаты аппроксимируются полиномами небольших степеней. Затем эти полиномы

**Таблица 3.** Причинно-следственные связи между переменными модели

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$
$X_1$	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	0	+	+	-	$P_1$	-	-
$X_2$	0	0	0	+	+	0	0	+	+	0	+	0	0	0	+	-	-	-	-
$X_3$	0	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-	0	-
$X_4$	0	+	0	0	+	0	+	+	+	0	+	0	0	0	+	-	-	-	-
$X_5$	0	+	0	+	0	0	+	+	0	0	+	0	0	+	+	-	-	-	-
$X_6$	0	0	+	0	0	0	+	+	+	+	+	0	+	0	0	-	-	0	-
$X_7$	+	-	0	0	-	0	0	+	0	-	0	0	+	+	0	-	-	-	$P_2$
$X_8$	+	0	0	0	0	0	+	0	+	0	+	+	0	+	+	0	-	0	-
$X_9$	+	-	-	0	0	0	0	0	0	+	+	+	0	+	0	0	0	0	0
$X_{10}$	+	-	-	0	0	0	+	+	+	0	0	0	+	+	0	-	-	-	-
$X_{11}$	+	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	+	0	0	$P_3$	0	-	0	-
$X_{12}$	+	0	0	0	0	0	+	+	0	0	+	0	0	0	+	0	-	0	0
$X_{13}$	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	+	-	-	-	-

подставляются в подынтегральное выражение (1) и вычисляется значение определенного интеграла, соответствующее плану мероприятий, для которого построена математическая модель (9). Решением задачи является план с наименьшим значением целевой функции.

#### 4. Модельный пример

Для модельного примера использовались статистические данные, приведенные в [2]. Для иллюстрации методики рассмотрим процедуру формирования функций  $f_{1,B}(X_B)$  зависимости общего количества ДТП от количества ДТП в связи с различными причинами:

$$(10) \quad \begin{cases} f_{1,7}(X_7(t)) = 6,7X_7^2 - 11,3X_7 + 5,66, \\ f_{1,8}(X_8(t)) = -1,51X_8^2 + 2,45X_8 - 0,04, \\ f_{1,9}(X_9(t)) = -0,95X_9^2 + 1,64X_9 + 0,24, \\ f_{1,10}(X_{10}(t)) = -2,65X_{10}^2 + 5,24X_{10} - 1,64, \\ f_{1,11}(X_{11}(t)) = -0,58X_{11}^2 + 0,83X_{11} + 0,65, \\ f_{1,12}(X_{12}(t)) = -1,55X_{12}^2 + 2,74X_{12} - 0,28. \end{cases}$$

На рис. 5 и 6 как пример приведены графики обозначенных зависимостей.

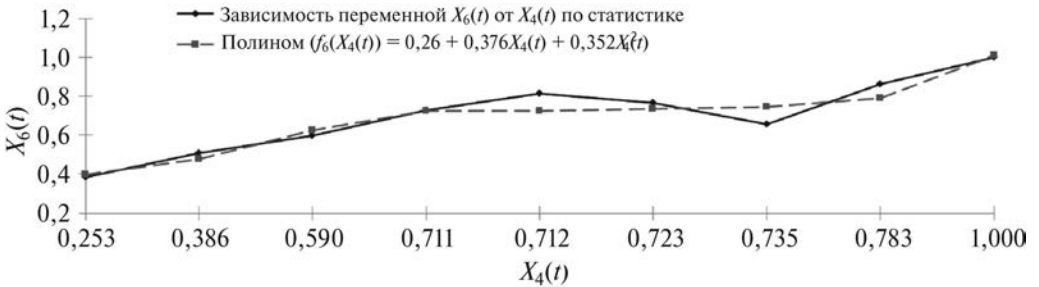


Рис. 5. График зависимости количества ДТП с пострадавшими водителями (показатель  $X_6$ ) от количества ДТП, с места совершения которых водитель скрылся, а транспортное средство осталось на месте (показатель  $X_4$ ).

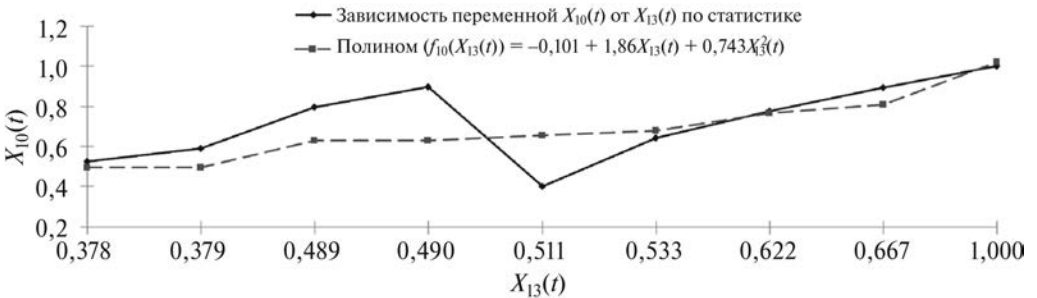


Рис. 6. График зависимости количества ДТП (показатель  $X_{10}$ ) от количества ДТП из-за нарушения ПДД водителями, возраст которых от 16 до 18 лет (показатель  $X_9$ ).

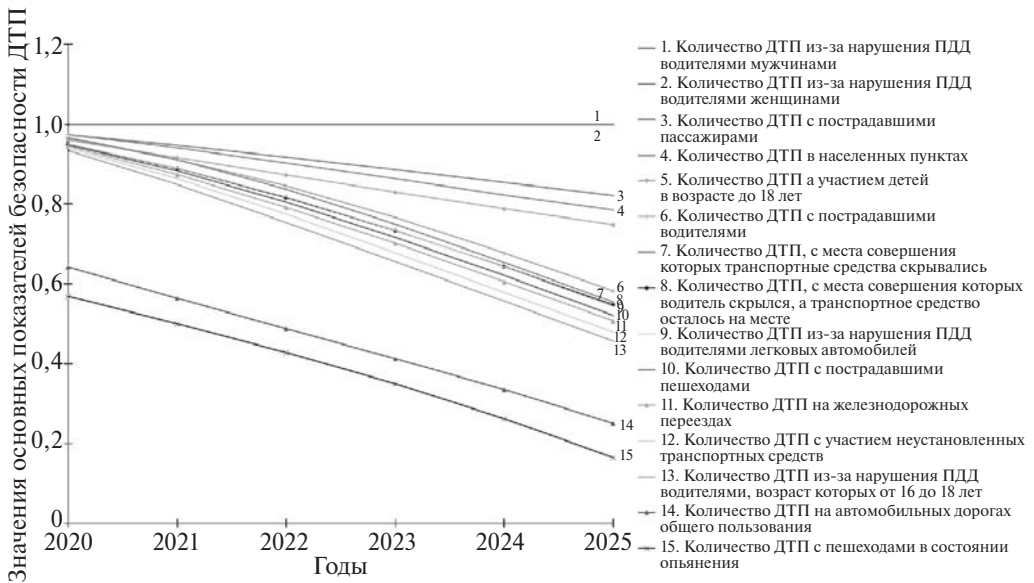


Рис. 7. Результаты решения.

На основе подобным образом выявленных зависимостей построена система нелинейных дифференциальных уравнений, для решения которой использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка точности (входит в состав одной из библиотек языка Python). Решение системы было получено при начальных условиях  $X_1 = 0,89$ ,  $X_2 = 1$ ,  $X_3 = 0,86$ ,  $X_4 = 1$ ,  $X_5 = 0,95$ ,  $X_6 = 0,87$ ,  $X_7 = 0,84$ ,  $X_8 = 1$ ,  $X_9 = 0,86$ ,  $X_{10} = 0,95$ ,  $X_{11} = 1$ ,  $X_{12} = 0,95$ ,  $X_{13} = 0,62$ . Результаты решения в виде графиков приведены на рис. 7 и аппроксимированы полиномами (12).

$$\begin{aligned}
 X_1(t) &= -0,00072t^2 - 0,0728t + 0,7135, \\
 X_2(t) &= -0,0035t^2 - 0,0638t + 1,0128, \\
 X_3(t) &= -0,0054t^2 - 0,0456t + 1,0198, \\
 X_4(t) &= -0,0044t^2 - 0,0503t + 1,0058, \\
 X_5(t) &= -0,0027t^2 - 0,0743t + 1,0198, \\
 X_6(t) &= -0,0054t^2 - 0,0385t + 1,0081, \\
 X_7(t) &= -0,0006t^2 - 0,0267t + 1,0017, \\
 X_8(t) &= -0,0043t^2 - 0,056t + 1,0097, \\
 X_9(t) &= 0,0004t^2 - 0,045t + 1,0041, \\
 X_{10}(t) &= -0,0006t^2 - 0,0338t + 1,0092, \\
 X_{11}(t) &= -0,0036t^2 - 0,0555t + 0,6269, \\
 X_{12}(t) &= -0,0052t^2 - 0,0469t + 1,0035, \\
 X_{13}(t) &= -0,0017t^2 - 0,0846t + 1,0217.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

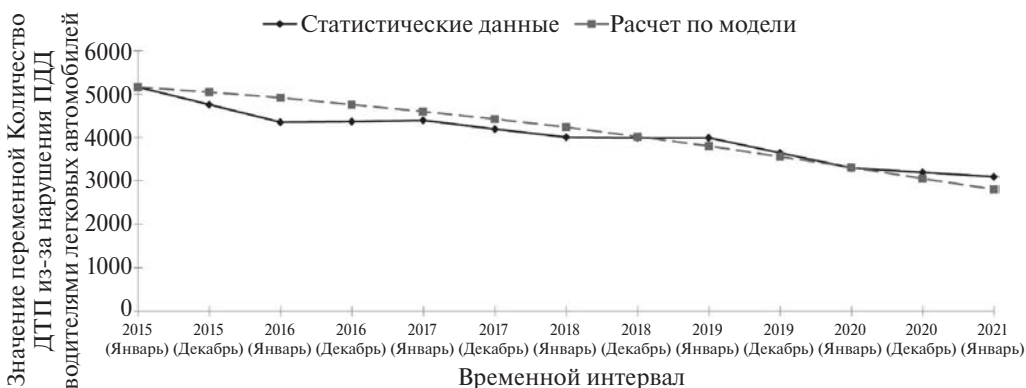
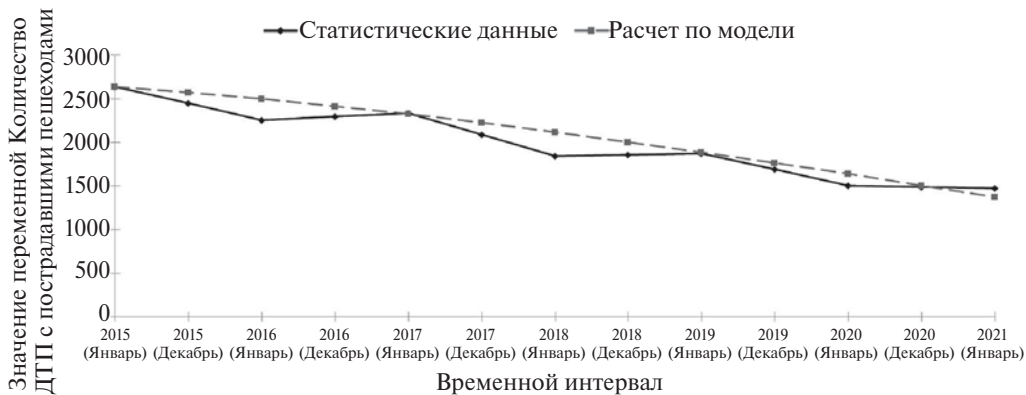


Рис. 8. Сравнение статистических и расчетных данных для показателей безопасности  $X_8(t)$  и  $X_{12}(t)$ .

Полученные результаты достаточно хорошо коррелируют со статистическими данными, приведенными на сайте Госавтоинспекции МВД России [2]. Плавный характер графиков может быть объяснен тем, что Стратегия [1] предусматривала равномерное снижение значений этих показателей.

#### 4.1. Коррекция модели

При разработке математической модели крупномасштабной системы необходимо выполнить ряд противоречивых требований. Во-первых, следует учесть высокую размерность объекта моделирования, наличие сложной системы взаимосвязей между его параметрами, а также их возможный значительный временной дрейф. Во-вторых, следует обеспечить требуемую точность модели особенно на длительных интервалах времени, а также сохранить приемлемую продолжительность ее разработки. Выполнение этих требований заставляет упрощать математическое описание крупномасштабной системы, что приводит к уменьшению трудоемкости, времени и точности создаваемой модели и делает необходимым проведение ее периодической коррекции. Коррекция математической модели проводится путем изменения спис-

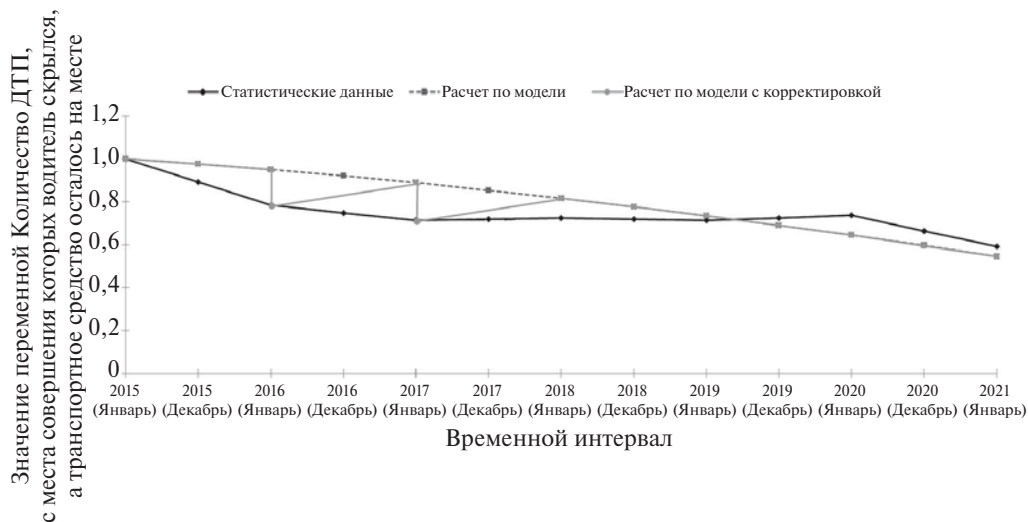


Рис. 9. Коррекция для переменной  $X_4(t)$ .

ка причинно-следственных связей показателей и факторов, добавления новых показателей с целью увеличения точности моделирования. При решении задачи (1)–(3) предусмотрена коррекция модели, если ошибка определения по крайней мере одного из основных показателей  $X_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 15}$ , превышает 10%. Данная величина выбрана в результате обобщения мнения специалистов, ответственных за обеспечение транспортной безопасности города, и разработчиков модели системной динамики; при необходимости величина допустимой ошибки может быть изменена. Рассмотрим в качестве примера процедуру коррекции расчетного значения переменной  $X_4$ , для чего воспользуемся статистическими данными по изменению этой величины в 2004–2020 гг. [2].

На рис. 9 видно, что с января 2004 г. по июнь 2005 г. коррекция не делалась, а далее – была проведена (ломаная линия).

#### 4.2. Процедура решения задачи для модельного примера

Не снижая общности рассуждений, допустим, что множество альтернативных планов  $P$ , которые разработал ЛПР для решения задачи (1)–(3), состоит из трех элементов  $p_1, p_2, p_3$ . В соответствии с постановкой задачи (1)–(3) для ее решения необходимо определить такой план мероприятий  $p_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , которому соответствует минимальное значение целевой функции  $Z(p(t))$ . Кроме того, этот план должен удовлетворять условию (3), в соответствии с которым основные показатели не должны выходить за заданные для них границы. Границы определяются для каждого показателя отдельно, их значения основаны на опыте и современных требованиях по безопасности движения. Эти границы на рис. 10 и 11 отмечены штрихпунктирной линией. На рис. 10 видно, что в 2023 г. для плана  $p_2$  значения всех показателей находятся в допустимой области. Однако в 2024 г., как следует из рис. 11, показатель  $X_7$  при реали-

### Основные показатели ДТП Москвы в 2023 г.



Рис. 10. Изменения основных показателей безопасности Москвы в 2023 г.

### Основные показатели ДТП Москвы в 2024 г.

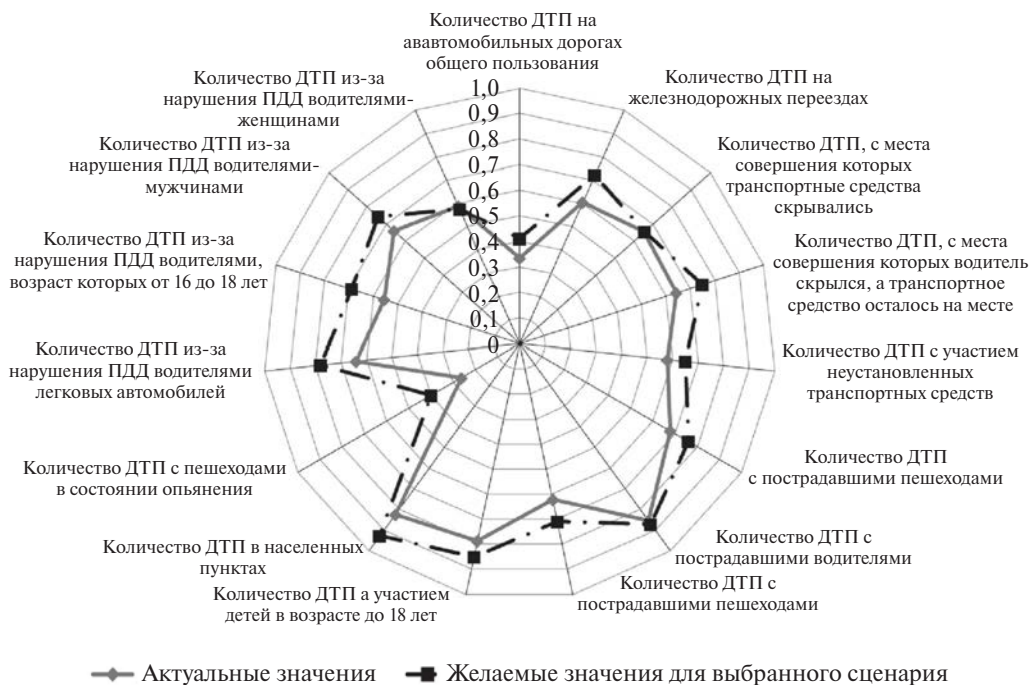


Рис. 11. Изменения основных показателей безопасности Москвы в 2024 г.

зации  $p_2$  выйдет за допустимые пределы. Поэтому такой план исключается из дальнейшего рассмотрения.

Решим задачу (1)–(3) на множестве управляющих воздействий, состоящем из двух оставшихся планов  $p_1$  и  $p_3$ . Получим значение  $Z(p_1(t)) = 1,6031$ . Аналогично определим  $Z(p_3(t)) = 1,8573$ . Так как  $Z(p_1(t)) < Z(p_3(t))$ , то решением задачи является план  $p_1$ .

## 5. Заключение

В статье формулируется постановка задачи управления дорожно-транспортной системой мегаполиса по критерию безопасности. Предложена математическая модель динамики основных показателей безопасности дорожно-транспортного движения мегаполиса. Разработана процедура решения задачи, проиллюстрированная модельным примером. В примере показано построение системы нелинейных дифференциальных уравнений. Решение этой системы дает возможность смоделировать динамику рассматриваемых показателей на требуемых интервалах времени. Предложена процедура коррекции математической модели при определенном увеличении ошибки прогнозирования. Результаты решения проверены с использованием статистики показателей безопасности дорожно-транспортного движения г. Москвы [2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Распоряжение Правительства РФ от 08.01.2018 N 1-р «Об утверждении Стратегии безопасности дорожного движения в Российской Федерации на 2018–2024 годы». [Электронный ресурс]: <http://static.government.ru> HYPERLINK "http://static.government.ru"
2. Сайт Госавтоинспекции МВД России, сведения о показателях состояния безопасности дорожного движения. [Электронный ресурс]: <http://stat.gibdd.ru/> (дата обращения: 24.03.2023).
3. *Yannis G., Weijermars W., Gitelman V., et al.* Road safety performance indicators for the interurban road network // Accident; Anal. Prevent. 2013. V. 60. P. 384–395.
4. *Salmon P.M., Read G.J.M., Thompson J., et al.* Computational modelling and systems ergonomics: a system dynamics model of drink driving-related trauma prevention // Ergonomics. 2020. V. 63(8). P. 965–980.
5. *Брюн Е.А., Бурцев А.А., Баканов К.С.* Анализ показателей управления транспортными средствами в состоянии опьянения в Российской Федерации в 2007–2019 гг. // Наркология. 2020. Т. 19. No. 6. С. 32–43.
6. *Guo Q., Xu P., Pei X., et al.* The effect of road network patterns on pedestrian safety: A zone-based Bayesian spatial modeling approach // Accident; Anal. Prevent. 2017. V. 99(Pt A). P. 114–124.
7. *Dell'Acqua G., Luca M.D., Mauro R.* Road Safety Knowledge-Based Decision Support System // Proced. Soc. Behavior. Sci. 2011. V. 20. P. 973–983.
8. *Gettman D.M., Head L.* Surrogate Safety Measures from Traffic Simulation Models // Transport. Res. Record. 2003. V. 1840. P. 104–115.

9. *Баканов К.С., Ляхов П.В., Айсанов А.С. и др.* Дорожно-транспортная аварийность в Российской Федерации за 6 месяцев 2022 года. М.: Научный центр безопасности дорожного движения МВД РФ, 2022.
10. *Forrester J.* Principles of systems. Cambridge: Wright Allen Press, 1960.
11. *Burkov V.N., Loginovskiy O.V., Dranko O.I., Hollay A.V.* The mechanisms of smart management for industrial enterprises // Appl. Math. Control Sci. 2020. No. 1. P. 59–73.
12. *Khamutova M.V., Kushnikov V.A., Dranko O.I.* A mathematical model for choosing an action plan for the prevention and elimination of flood effects // IFAC-PapersOnLine. 2022. T. 55. No. 3. P. 113–118.
13. *Tsvirkun A.D., Rezchikov A.F., Kushnikov V.A., et al.* Models and methods for verifying the accessibility and feasibility of goals and plans in large-scale systems by example for the elimination of consequences floods // Autom. Remote Control. 2023. No. 12. P. 49–63.
14. *Rezchikov A.F., Kushnikov V.A., Ivaschenko V.A., et al.* Controlling the welding process in robotic technological complexes by the criterion of product quality // Mechatronics, Automation, Control. 2019. T. 20. No. 1. P. 29–33.
15. *Поляков М.С., Кушников В.А., Богомолов А.С., Резчиков А.Ф.* Модели системной динамики для анализа характеристик дорожно-транспортной системы России // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2023) : Тр. 16-й междунар. конф. Москва, Россия, 2023. С. 1002–1012.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.*

Поступила в редакцию 27.05.2024

После доработки 06.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024

© 2024 г. И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ ГРАМИАНОВ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕТРИК НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Разработаны новые алгоритмы поэлементного вычисления матриц прямых и обратных грамианов для устойчивых непрерывных линейных ММО ЛТИ систем на основе спектральных разложений грамианов в форме произведений Адамара. Показано, что матрицы мультипликаторов в произведении Адамара являются инвариантами при различных канонических преобразованиях линейных непрерывных систем. Получены также спектральные разложения обратных матриц грамианов непрерывных динамических систем по спектрам самих матриц грамианов и исходных матриц динамики. Исследованы свойства матриц мультипликаторов в спектральных разложениях грамианов. С помощью этих результатов получены спектральные разложения следующих энергетических метрик: объемов эллипсоидов притяжения, следов матрицы прямого и обратного грамианов управляемости, входной и выходной энергии системы индексов центральности энергетических метрик управляемости, средней минимальной энергии. Даны рекомендации по использованию полученных результатов.

*Ключевые слова:* спектральные разложения, непрерывные динамические системы, грамианы, уравнения Ляпунова и Сильвестра, матрицы мультипликаторов, произведение Адамара.

DOI: 10.31857/S0005231024100075, EDN: YUOTDD

### 1. Введение

Матрицы грамианов являются решениями уравнений Ляпунова и Сильвестра специального вида, которые в настоящее время достаточно хорошо изучены [1–7]. Хотя теория управления предлагает математические инструменты для управления техническими и природными системами, научные основы управления сложными кибер-физическими системами еще недостаточно разработаны. В работе [8] предложены аналитические инструменты для изучения управляемости произвольной сложной направленной сети на основе оптимального выбора управляющих узлов сети, которые могут эффективно управлять всей динамикой системы. Применение этих инструментов к реальным сетям обнаружило, что количество управляющих узлов определяется в основном распределением узлов сети. Теория управления является математически продвинутой отраслью техники, имеющей многочисленные приложения к электрическим системам, производственным процессам, системам

связи, самолетам, космическим аппаратам. Однако фундаментальные вопросы, касающиеся управляемости сложных систем, возникающие в природе и технике, до сих пор не решены в полной мере. Используя метрику управляемости, определяемую долей эффективно управляющих узлов сети в их минимальном наборе, необходимом для полной управляемости, в [9] показано, что разреженные неоднородные сети обладают плохой управляемостью, в то время как плотные однородные сети по сравнению с ними обладают лучшей управляемостью. Преобразование уравнений состояния в канонические формы управляемости и наблюдаемости позволяет упростить решение уравнений Ляпунова и исследовать структурные свойства управляемости и наблюдаемости [9–12]. Важная задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств на основе различных энергетических функционалов, в том числе инвариантных эллипсоидов, рассматривалась в [13–16]. В [10] сформулирован общий подход к решению задачи оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов для многосвязных систем управления, который основан на декомпозиции системы на устойчивую и неустойчивую подсистемы. Степень управляемости системы определяется на основе энергетических метрик, основанных на использовании конечных и бесконечных грамианов управляемости. Предложен общий метод вычисления обратного грамиана управляемости для уравнений состояния, заданных в канонических формах управляемости. В [13] предложен метод оптимального размещения виртуальной инерции на графе энергетической системы, основанный на использовании энергетических метрик когерентности генераторов и квадрата  $H_2$ -нормы оператора системы, заданной стандартной динамической моделью в пространстве состояний. Проблема формализована как задача невыпуклой оптимизации с ограничениями в виде значений грамианов наблюдаемости. Хорошо известно, что задачи управления с минимальной энергией также решаются с использованием грамианов. За последние годы эти подходы были развиты для сложных энергетических, социальных, транспортных и биологических сетей в [17–21]. В [19] показано, что во многих случаях, чем ближе собственные числа матрицы динамики к мнимой оси, тем меньше энергии требуется для обеспечения полной управляемости сети. Таким образом, степень управляемости (достижимости) сети связана с минимальной энергией, что позволяет ввести в рассмотрение новые метрики в виде минимального собственного числа грамиана управляемости и максимального числа его обратного грамиана, а также следов этих грамианов. В электроэнергетике вставки постоянного тока используются для демпфирования опасных низкочастотных колебаний. Использование метода грамианов для оптимального размещения вставок постоянного тока в полномасштабной модели электроэнергетической системы Европы позволило успешно решить проблему глобальной оптимизации размещения вставок постоянного тока на графе модели системы.

## 2. Постановка задачи

В дальнейшем будем рассматривать ориентированный граф  $G$ , образованный множеством узлов  $E$  и множеством ребер  $Q$ . Хорошо известно, что для описания модели графа можно использовать линейную динамическую модель графа со стандартным описанием в виде  $(A, B, C)$  представления в пространстве состояний. В качестве такой модели рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную ММО ЛТИ линейную стационарную непрерывную динамическую систему с многими входами и многими выходами вида

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(0) = 0,$$

где  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$ ,  $y(t) \in R^m$ .

Большие динамические сети можно описать уравнениями вида (1), в которых  $A$  – матрица Лапласиана,  $B$  – матрица управляющих входов,  $C$  – матрица измеряемых выходов, причем порядок матрицы динамики графа является достаточно большим положительным числом [19]. Уравнение Ляпунова для вычисления грамиана управляемости системы (2.1) имеет вид

$$(2.2) \quad AP^c + P^c A^T = -BB^T.$$

Каждый исполнительный механизм в реальной системе ограничен по энергии управления, поэтому важный класс метрик управляемости имеет дело с количеством входной энергии, необходимой для достижения заданного состояния из исходного состояния. В частности, можем поставить следующую задачу оптимального управления с минимальной энергией, которая приведет систему из исходного состояния в конечное состояние  $x_f$  в момент времени  $t$  [10]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \underset{u(t) \in \mathcal{L}_2}{\text{minimize}} \int_0^T \|u(\tau)\|^2 d\tau, \\ & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ & x(0) = 0, \quad x(t) = x_f. \end{aligned}$$

Для получения решения могут быть использованы стандартные методы теории оптимального управления. Если система управляема, то оптимальный вход  $u(\tau)^*$  имеет вид

$$u(\tau)^* = B^T e^{A^T(\tau-t)} \left( \int_0^T e^{A\sigma} BB^T e^{A^T} d\sigma \right)^{-1} x_f, \quad 0 \leq \tau \leq t.$$

Оптимальный минимум энергии по входу равен

$$(2.4) \quad \int_0^T \|u(\tau)\|^2 d\tau = x_f^T \left( \int_0^T e^{A\sigma} BB^T e^{A^T} d\sigma \right)^{-1} x_f.$$

Средняя минимальная энергия определяется выражением [19]

$$E_{avmin} = \frac{1}{n} \operatorname{tr} P_c^{-1} = \frac{\int_{\|x\|=1} x^T P_c(t) x dx}{\int_{\|x\|=1} dx}.$$

Матрица

$$(2.5) \quad P_c(t) = \int_0^T e^{A\sigma} B B^T e^{A^T \sigma} d\sigma$$

называется конечным грамианом управляемости в момент времени  $t$ . Грамиан управляемости  $P_c(t)$  в большинстве случаев является положительной полуопределенной матрицей. Он определяет эллипсоид в пространстве состояний

$$\mathcal{E}_{\min} = \left\{ x \in R^n \mid x^T P_c(t)^{-1} x \leq 1 \right\},$$

который содержит множество состояний, достижимых за  $t$  секунд. Собственные векторы и соответствующие собственные значения матрицы  $P_c(t)^{-1}$  определяют длины соответствующих полуосей эллипсоида [6].

*Определение 1.* Назовем матрицей Сяо псевдоганкелеву квадратную матрицу, имеющую структуру нулевого плета вида [9]

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \dots \\ 0 & -y_3 & 0 & \dots & 0 \\ y_3 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{bmatrix}, \quad y_i \in \mathbb{C}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Элементы матрицы вычисляются по формулам

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, & \text{если } j + \eta = 2k + 1, \quad k = 1, 2, \dots, n; \\ (-1)^{\frac{i-\eta}{2}} \mathbf{y}_n, & \text{если } j + \eta = 2k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Рассмотрим важный частный случай непрерывных линейных стационарных SISO (с одним входом и одним выходом) ЛТИ систем, представленных уравнениями состояния в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В этом случае грамианы управляемости и наблюдаемости определяются формулами [20]

$$(2.6) \quad P^{cF} = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1\eta+1},$$

$$(2.7) \quad P^{oF} = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1\eta+1},$$

где  $N(s)$  – характеристический полином системы.

Представление грамианов в форме Адамара согласно формулам (2.6)–(2.7) принимает вид

$$P^{cF} = \Omega_{cF} \circ \Psi_c, \quad \Psi_c = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1_{j+1\eta+1},$$

$$P^{oF} = \Omega_{oF} \circ \Psi_o, \quad \Psi_o = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1_{j+1\eta+1}.$$

Отсюда вытекают тождества

$$(2.8) \quad P^{cF} \equiv \Omega_{cF} = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1\eta+1},$$

$$P^{oF} \equiv \Omega_{oF} = \Omega_{cF}.$$

Матрицы  $\Omega_{cF}$ ,  $\Omega_{oF}$  являются матрицами Сяо [20]. Запишем их в форме

$$\Omega_{cF} = \omega(n, s_k, j, \eta) 1_{j+1\eta+1},$$

$$\omega(n, s_k, j, \eta) = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)}, \quad j, \eta = 0, n-1.$$

Заметим, что  $j+1, \eta+1$  являются номерами строк и столбцов матрицы Сяо. Функция  $\omega(n, s_k, j, \eta)$  является скалярным мультипликатором и инвариантом при различных преобразованиях подобия [7]. Рассмотрим далее динамическую сеть, описываемую уравнениями состояния графа вида (2.1) и определим матрицу  $V$  в виде

$$V = [ e_1 \quad \dots e_i \quad \dots \quad e_n ],$$

где  $e_i$  – единичный вектор в  $R^n$ ,  $i$  – номер узла графа. Следуя [21], определим индекс центральности энергетической метрики управляемости узла графа в форме

$$J_{CE_i} = \text{tr}(P_{ci}),$$

где  $P_{ci}$  – бесконечный грамиан управляемости узла графа, определяемый в виде решений следующих модальных уравнений Ляпунова

$$AP_{ci} + P_{ci}A^T = -e_i e_i^T.$$

Вследствие линейности уравнений Ляпунова справедливо равенство

$$J_{CE} = \sum_{i=1}^n J_{CE_i}.$$

Это уравнение определяет индекс центральности энергетических метрик графа. Обобщая эти результаты для случая непрерывных МИМО ЛТИ систем, можно ввести аналогичный индекс центральности энергетических метрик

управляемости отдельных мод этих систем для случая устойчивых полностью управляемых и наблюдаемых систем с простым спектром матрицы динамики

$$J_{CE_i} = \text{tr} (P_{ci}),$$

где  $i$  – номер отдельного собственного числа матрицы динамики. Обоснование подобного подхода состоит в том, что любая линейная непрерывных ММО ЛТИ систем может быть представлена в виде графа, узлы которого соответствуют отдельным собственным числам. Как показано в [10] справедлива формула

$$P_{ci} = e_i \left( \int_0^{\infty} e^{A\sigma} B B^T e^{A^*\sigma} d\sigma \right) e_i^T = e_i Q(0, \infty) e_i^T,$$

где  $Q(0, \infty)$  – бесконечный грамиан управляемости.

В [10] показано, что матрица  $Q(0, \infty)$  является матрицей Сяо, которая при сделанных в ней предположениях является инвариантом при любых невырожденных преобразованиях координат и положительно-определенной матрицей. Заметим, что грамианы управляемости играют центральную роль при формировании инвариантных эллипсоидов притяжения. Рассмотрим далее цели исследования для решения некоторых задач оценивания состояния и управления. Первой целью статьи будет получение спектральных разложений обратных матриц грамианов непрерывных динамических систем по спектрам самих обратных матриц и исходных матриц динамики. Другой целью настоящей статьи является получение спектральных разложений следующих энергетических метрик [6, 8–19]:

1. Объема эллипсоидов притяжения  $Vol\epsilon_x, Vol\epsilon_y$ . Эта метрика характеризует объем подмножества пространства состояний, достижимого из начала координат при фиксированном количестве энергии управления, являющейся функцией определителя грамиана управляемости.

2. Следов матрицы грамиана управляемости  $\text{tr} P_c$ . Эта метрика характеризует меру энергии, которая обратно пропорциональна средней энергии, необходимой для управления системой в различных направлениях пространства состояний.

3. Следов обратной матрицы грамиана управляемости  $\text{tr} P_c^{-1}$ . Эта метрика характеризует меру энергии, которая пропорциональна средней энергии, необходимой для управления системой в различных направлениях пространства состояний.

4. Входной и выходной энергии системы  $E_{in}, E_{out}$ .

5. Индексов центральности энергетических метрик управляемости системы отдельных мод непрерывных многосвязных стационарных систем  $J_{CE}, J_{CE_i}$ .

6. Средней минимальной энергии  $E_{avmin}$ .

### 3. Сепарабельные спектральные разложения инверсных грамианов непрерывных МИМО ЛТИ систем в форме обобщенных матриц Сяо

Следующие два метода определения спектральных разложений обратной матрицы грамианов управляемости будут предложены ниже.

*Первый* метод. Сепарабельные спектральные разложения инверсных грамианов непрерывных МИМО ЛТИ систем (2.1) основаны на разложении резольвенты матрицы грамиана управляемости в ряд Фаддеева–Леверье и вычислении нулевого члена этого разложения. Разложение резольвенты имеет вид [22, 23]

$$(3.1) \quad (Is - P_c)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} R_{j+1} s^j}{N(s)}.$$

Примем  $N(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Обозначим через  $\lambda_k$  корни характеристического уравнения. Матрицы Фаддеева  $R_j$  и коэффициенты характеристического уравнения грамиана определяют с помощью следующего алгоритма

«1-й» шаг:  $p_n = 1$ ,  $R_n = I$ ,  $R_i = \sum_{j=i}^n p_j P_c^{j-i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

.....  
 «k-й» шаг:  $p_{n-k} = -\frac{1}{k} \text{tr}(P_c R_{n-k+1})$ ,  $R_{n-k} = p_{n-k}I + P_c R_{n-k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

.....  
 «n-й» шаг:  $p_0 = -\frac{1}{n} \text{tr}(P_c R_1)$ ,  $R_0 = p_0I + P_c R_1 = 0$ .

Положив  $s = 0$  получим [24]

$$(3.2) \quad P_c^{-1} = -p_0^{-1}R_1 = p_0^{-1} - p_1I - p_2P_c - \dots - P_c^{n-1}.$$

Таким образом, с помощью спектрального разложения резольвенты матрицы грамиана управляемости получена формула вычисления обратной матрицы грамиана. Заметим, что при этом не только вычислена обратная матрица грамиана, но и все коэффициенты характеристического полинома грамиана, что позволяет вычислить все собственные числа матрицы грамиана. Кроме того, для простого спектра матрицы грамиана получим формулу, представляющую спектральное разложение обратного грамиана по спектру матрицы грамиана

$$P_c^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} P_{c,j} \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma_\lambda)} \frac{1}{\sigma_\lambda},$$

где  $P_c$  – матрица грамиана управляемости,  $P_{c,j}$  – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана,  $\sigma_\lambda$  – собственное число матрицы грамиана  $P_c$ .

Второй метод. Из (3.2) видно, что обратную матрицу образует сумма неотрицательных степеней грамиана. Из этого наблюдения вытекает следующий результат.

*Лемма 1.* Рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную линейную динамическую систему МИМО LTI с простым спектром с многими входами и многими выходами в виде (2.1). Предположим, что система (2.1) устойчива, матрицы  $A, BB^T$  являются вещественными, матрица  $A$  имеет простой спектр, собственные числа  $s_k, s_p$  различны. Грамиан управляемости имеет в соответствии с [24] структуру матрицы  $S_{\text{яо}}$  для четных  $n$  в виде

$$P_c = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & -p_{22} & \dots & 0 \\ 0 & p_{22} & \dots & 0 & \dots \\ -p_{22} & \dots & \dots & \dots & -p_{n-1n-1} \\ \dots & 0 & \dots & p_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & -p_{n-1n-1} & 0 & p_{nn} \end{bmatrix},$$

для нечетных  $n$  в виде

$$P_c = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & -p_{22} & \dots & p_{\frac{n+1}{2} \frac{n+1}{2}} \\ 0 & p_{22} & \dots & -p_{\frac{n+1}{2} \frac{n+1}{2}} & \dots \\ -p_{22} & \dots & \dots & \dots & -p_{n-1n-1} \\ \dots & -p_{\frac{n+1}{2} \frac{n+1}{2}} & \dots & p_{n-1n-1} & 0 \\ p_{\frac{n+1}{2} \frac{n+1}{2}} & \dots & -p_{n-1n-1} & 0 & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда обратная матрица грамиана управляемости имеет вид для четных  $n$

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} & 0 & \tilde{p}_{13} & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{p}_{22} & \dots & 0 & \dots \\ \tilde{p}_{31} & \dots & \dots & \dots & \tilde{p}_{n-2n} \\ \dots & 0 & \dots & \tilde{p}_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \tilde{p}_{nn-2} & 0 & \tilde{p}_{nn} \end{bmatrix},$$

для нечетных  $n$

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} & 0 & \tilde{p}_{13} & \dots & \tilde{p}_{1n} \\ 0 & \tilde{p}_{22} & \dots & \tilde{p}_{2n-1} & \dots \\ \tilde{p}_{31} & \dots & \dots & \dots & \tilde{p}_{n-2n} \\ \dots & \tilde{p}_{n-12} & \dots & \tilde{p}_{n-1n-1} & 0 \\ \tilde{p}_{n1} & \dots & \tilde{p}_{nn-2} & 0 & \tilde{p}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Назовем подобную структуру структурой обобщенной матрицей  $S_{\text{яо}}$ , которая наследует от матрицы  $S_{\text{яо}}$  (наличие нуля в тех элементах, где сумма строки и столбца нечетна).

*Доказательство.* В соответствии с (3.1) структура матрицы  $(P_c)^{-1}$  совпадает со структурой матрицы Фаддеева  $R_1$ . Последняя представляет собой линейную комбинацию неотрицательных степеней матрицы  $P_c$ , которая

представляет собой сумму мультипликаторов с нулевым пледом [11]. Прямой проверкой можно убедиться в том, что любая положительная степень “ $k$ ” матрицы  $P_c$  не меняет структуру мультипликатора. Добавление к такой структуре диагональной матрицы  $p_0^{-1}p_1I$  не меняет структуру матрицы мультипликатора. В доказанной лемме ничего не говорится о вычислении элементов матрицы  $(P_c)^{-1}$ . Эту задачу можно решить путем сведения задачи вычисления обратной матрицы к совокупности решений  $n$  линейных систем алгебраических уравнений с одинаковой матрицей левой части.

*Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы. Тогда элементы матрицы обратного грамиана можно вычислить путем решения системы линейных алгебраических уравнений СЛАУ вида*

$$(3.3) \quad P_c X = I,$$

где матрица  $P_c$  является обобщенной матрицей Сяо. Система (3.3) сводится к решению  $n$  систем линейных алгебраических уравнений СЛАУ вида

$$(3.4) \quad P_c x_i = e_i,$$

где  $x_i$  – столбец “ $i$ ” матрицы  $X$ , а  $e_i$  – единичный вектор.

Таким образом, описанный метод можно назвать гибридным, поскольку он сочетает разложение резольвенты матрицы грамиана управляемости в ряд Фаддеева–Леверье и метод СЛАУ. Для систем невысокой размерности он позволяет получить следующие расчетные формулы для вычисления элементов обратной матрицы грамиана в форме Сяо.

### *Иллюстративный пример*

Приведем решения СЛАУ (3.3) для систем невысокой размерности  $n = 1$ .

$$x_{11} = (p_{11})^{-1}.$$

$n = 2$ .

$$x_{11} = (p_{11})^{-1}, \quad x_{22} = (p_{22})^{-1}.$$

$n = 3$ .

$$\begin{aligned} x_{11} &= p_{33} (p_{11}p_{33} - p_{22}^2)^{-1}, \quad x_{31} = p_{22} (p_{11}p_{33} - p_{22}^2)^{-1}, \\ x_{22} &= (p_{22})^{-1}, \\ x_{13} &= p_{22} (p_{11}p_{33} - p_{22}^2)^{-1}, \quad x_{33} = p_{11} (p_{11}p_{33} - p_{22}^2)^{-1}, \end{aligned}$$

$n = 4$ .

$$\begin{aligned} x_{11} &= p_{33} (p_{11}p_{33} - p_{22}^2)^{-1}, \quad x_{31} = p_{22} (p_{11}p_{33} - p_{22}^2)^{-1} \\ x_{24} &= x_{42} = p_{33} (p_{22}p_{44} - p_{22}^2)^{-1}. \end{aligned}$$

#### 4. Свойства матриц Сяо

Лемма 2 [25]. Рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную линейную динамическую систему МИМО ЛТИ с простым спектром с многими входами и многими выходами в виде (2.1). Предположим, что система (2.1) устойчива, полностью управляема и наблюдаема, представлена в канонической форме управляемости, матрицы  $A$ ,  $BV^T$  являются вещественными, матрица  $A$  имеет простой спектр, а ее собственные числа  $s_k, s_p$  различны.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Матрица  $P_c$  мультипликатора в разложении Адамара грамиана управляемости является решением уравнения Ляпунова вида

$$AP_c + P_cA^T = -I.$$

Эта матрица является матрицей Сяо и нормальной матрицей.

2. Матрица мультипликатора в разложении Адамара субграмиана управляемости  $P_{ci}$  является решением модального уравнения Ляпунова вида

$$AP_{ci} + P_{ci}A^T = -I_{ii}.$$

3. Диагональные члены матриц мультипликатора являются положительными числами, определяемыми выражениями вида

$$p_{cii} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda=k}^n (-s_k - s_\lambda)} (-1)^{i-1} s_k^{2(i-1)} > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

4. Диагональные члены матриц субграмианов управляемости в форме матриц Сяо образуют комплексные или вещественные геометрические прогрессии в виде

$$p_{c11i} = p_{c11i-1}q_i,$$

где начальный член  $p_{c11i} = \frac{1}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda=k}^n (-s_k - s_\lambda)}$ , знаменатель  $q_i = -s_i^2$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

5. След матрицы Сяо является положительным числом, которое представляет собой сумму прогрессий, образуемых диагональными членами матриц субграмианов управляемости

$$(4.1) \quad \text{tr } P_c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda=k}^n (-s_k - s_\lambda)} \frac{(s_i^2)^{i-1} - 1}{(-s_i^2 - 1)} > 0.$$

*Доказательство.* Справедливость утверждения 1 следует из разложения Адамара грамиана управляемости  $P_c$  вида (2.8). В [24, 25] доказано, что

это решение единственно и является матрицей Сяо. Из [24] (Теорема 2, следствие 3) следует, что матрица мультипликатора  $\Omega$  в разложении Адамара грамиана управляемости  $P_c$  имеет вид

$$P(t) = \Omega(t) \circ \Psi, \quad \Omega = \omega(n, s_k, -s_k, i, j) 1_{n \times n}, \quad 1_{n \times n} = \sum_{j=1}^n \sum_{\eta=1}^n e_j e_{\eta}^T,$$

что доказывает первую часть утверждения 1 леммы. С другой стороны матрица Сяо симметрична и вещественна, откуда вытекает ее нормальность. Для таких матриц существует преобразование Шура, приводящее их к треугольному виду. Важно, что при этом располагаются на диагонали матриц их собственные числа [11]. Справедливость утверждения 2 следует из того, что при выполнении условий леммы выполняется равенство

$$P_c = \sum_{i=1}^n P_{ci}.$$

Диагональные члены матриц субграмианов управляемости определяются формулами (2.8), из которых следует справедливость утверждений 1–3. Положительность их суммы следует из условия полной управляемости и наблюдаемости системы ММО ЛТИ (утверждение 4). Из этого условия следует, что след матрицы Сяо является положительным числом и представляет собой сумму прогрессий, образуемых диагональными членами матриц субграмианов управляемости. Отсюда следует справедливость формулы утверждения 5

$$\text{tr } P_c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\dot{N}(s_i) N(-s_i)} \frac{(s_i^2)^{n-1} - 1}{(-s_i^2 - 1)} > 0.$$

Заметим, что представления спектральных разложений грамианов в форме Адамара тесно связано с геометрической теорией управления [7]. Матрицы мультипликаторов возникают естественным образом при рассмотрении произведений Адамара и наиболее простые представления этих матриц, как показано выше, появляются при использовании канонических представлений в форме управляемости и наблюдаемости. В первую очередь при описании матриц следует выделить значимые и нулевые элементы. Для тех и других имеет место свойство периодичности структуры, что позволяет отнести эти матрицы к классу псевдоганкелевых матриц. Значимые элементы всегда появляются на месте главных и побочных диагоналей в том случае, когда сумма индексов их строки и столбца является четным числом. В свою очередь нулевые элементы всегда появляются в главных и побочных диагоналях в том случае, когда сумма индексов их строки и столбца является нечетным числом. Матрицы мультипликаторов, состоящих из значимых и нулевых элементов, являются симметричными матрицами. Любая квадратная матрица, в том числе матрица решения уравнения Ляпунова, может быть представлена

в сепарабельной форме

$$P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} \mathbf{1}_{ij},$$

где матрица  $\mathbf{1}_{ij}$  – матрица мультипликатора, состоящая из нулей, за исключением элемента « $ij$ », равного единице. Преобразование Адамара является структурным преобразованием, что позволяет разделить скалярную и матричную части спектральных разложений грамианов, в которых скалярная часть определяет матрицу мультипликаторов, а матричная часть связана с матрицами разложения резольвенты матрицы динамики в ряд Фаддеева–Леверье и преобразованными матрицами правых частей уравнений Ляпунова. Важным свойством мультипликаторов SISO LTI систем в канонических формах управляемости и наблюдаемости является их положительная определенность, следствием которой является положительность диагональных элементов и следа соответствующих грамианов. Их элементы зависят только от собственных чисел матрицы динамики и ее характеристического многочлена, которые не зависят от преобразований подобия и, следовательно, являются инвариантами при этих преобразованиях. В отличие от матриц мультипликаторов SISO LTI систем, матричная часть спектральных разложений MIMO LTI зависит от преобразований подобия, однако и в этом случае использование инвариантных матриц мультипликаторов позволяет получить замкнутые формулы для вычисления любых элементов матриц грамианов. Из общих формул вычисления грамианов следует, что в этом случае матрица мультипликаторов является общей для грамианов управляемости и наблюдаемости [25]. Заметим, что матрицы мультипликаторов для SISO LTI систем можно вычислять с помощью таблиц Рауса с использованием коэффициентов характеристического уравнения, которые можно вычислить не вычисляя собственные числа матрицы динамики. Преимуществами данного подхода являются возможность получать замкнутые формулы для вычисления прямых и обратных грамианов управляемости для SISO LTI систем и отсутствие необходимости рассматривать спектральные разложения в случае кратных собственных чисел [11]. Диагональные канонические формы отличаются от канонических форм управляемости и наблюдаемости тем, что для первых грамианы и субграмианы являются в общем случае комплексными матрицами, а для вторых – действительными.

## 5. Спектральные разложения решений дифференциальных уравнений Ляпунова на конечном интервале

Рассмотрим линейную стационарную непрерывную MIMO LTI динамическую систему вида (2.1). Примем, что система (2.1) устойчива, если не оговорено иное, полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы  $A$  различны. Рассмотрим наряду с уравнением (2.1) дифференци-

альное уравнения Ляпунова вида

$$(5.1) \quad \frac{dP(t)}{dt} = AP(t) + P(t)A^T + BB^T, \quad P(0) = 0_{n \times n}, \quad t \in [0, T],$$

где  $BB^T$  – вещественная матрица размера  $(n \times n)$ .

Построим решение этого уравнения используя операционное исчисление и разложение резольвенты матрицы динамики  $A$  в ряд Фаддеева–Левереье. Последние имеют вид [21, 22]

$$(Is - A)^{-1} = \sum_{j=0}^n A_j s^j [N(s)]^{-1}, \quad A_j = \sum_{i=j+1}^n a_i A^{i-j+1},$$

$$(Is - A^T)^{-1} = \sum_{j=0}^n A_j^T s^j [N(s)]^{-1},$$

где  $A_j, A_j^T$  – матрицы Фаддеева, построенные для резольвент матриц с помощью алгоритма Фаддеева–Левереье;  $N(s)$  – характеристический полином матриц  $A, A^T$ ;  $a_i$  – коэффициенты этого полинома.

*Первый способ* спектральных разложений решений дифференциальных уравнений Сильвестра основан на известной лемме

*Лемма 3* [24]. *Рассмотрим решение уравнений Ляпунова на конечном полуинтервале  $[0, t] \in [0, T]$ . Предположим, что система (2.1) устойчива, матрицы  $A, BB^T$  являются вещественными, матрица  $A$  имеет простой спектр, собственные числа  $s_k, s_{m\rho}$  различны, не принадлежат мнимой оси плоскости собственных чисел, а также выполнены условия*

$$s_k + s_\rho \neq 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad \rho = \overline{1, n}.$$

Преобразуем систему к диагональному виду

$$x_d = Tx, \quad \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d,$$

$$A_d = TAT^{-1}, \quad B_d = TB, \quad C_d = CT^{-1}, \quad Q_d = TBB^T T^T,$$

или

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{bmatrix} = T\Lambda T^{-1},$$

где матрица  $T$  составлена из правых собственных векторов  $u_i$ , а матрица  $T^{-1}$  – из левых собственных векторов  $\nu_i^*$ , соответствующих собственному числу  $s_i$ .

Тогда грамиан управляемости диагонализированной линейной части является решением уравнения Ляпунова, которое определится из формулы

$$P_d^c = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n p_{dk,\rho}^c e_k e_\rho^T,$$

$$A_d = \text{diag} \{ \dots s_k \dots \} = Q_1 A Q_1^{-1},$$

где  $Q_1$  – матрица размеров  $n \times n$ .

В этом случае решение дифференциального уравнения Ляпунова на конечном полуинтервале  $[0, t) \in [0, T]$  имеет вид

$$P_d^c(t) = [p_{dk,\rho}^c(t)],$$

$$p_{dk,\rho}^c(t) = \frac{r_{dk,\rho}^c e^{(s_k + s_\rho)t}}{s_k + s_\rho} + p_{dk,\rho}^c, \quad p_{dk,\rho}^c = -\frac{r_{dk,\rho}^c}{s_k + s_\rho}, \quad r_{dk,\rho}^c = e_k Q_1 B B^T (Q_1^T) e_\rho^T,$$

$$P^c(t) = Q_1^{-1} P_d(t) (Q_1^T)^{-1}.$$

Второй способ решений дифференциальных уравнений Ляпунова основан на использовании преобразования Лапласа для вычисления интеграла Ляпунова и разложение резольвенты матрицы динамики в ряд Фаддеева–Леверье.

**Теорема 2.** Рассмотрим задачу вычисления решений дифференциальных уравнений Ляпунова для МИМО LTI систем (5.1). Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда справедливы следующие утверждения:

Случай простого комбинационного спектра матрицы  $A$

1. Спектральные разложения решений дифференциальных уравнений Ляпунова (5.1) в форме произведений Адамара для комбинационного спектра матриц динамики имеют вид

$$(5.2) \quad P_{j\eta}(t) = \Omega_{j\eta}(t) \circ \Psi_{j\eta}, \quad \Psi_{j\eta} = A_j B B^T B_\eta,$$

$$(5.3) \quad P_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda \neq \rho}^n (s_\rho - s_\lambda)} \left[ \frac{e^{(s_k + s_\rho)t} - 1}{s_k + s_\rho} \right] A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$\Omega_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda \neq \rho}^n (s_\rho - s_\lambda)} \left[ \frac{e^{(s_k + s_\rho)t} - 1}{s_k + s_\rho} \right] e_j e_\eta^T,$$

$$P(t) = \Omega(t) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^T B_\eta,$$

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda \neq \rho}^n (s_\rho - s_\lambda)} \left[ \frac{e^{(s_k + s_\rho)t} - 1}{s_k + s_\rho} \right] e_j e_\eta^T.$$

2. Для случая разложения решений дифференциальных уравнений Ляпунова для простого спектра матрицы динамики справедливы те же формулы (5.2)–(5.3) с другими матрицами мультипликаторов

$$(5.4) \quad P_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda = \rho}^n (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) A_j B B^T A_\eta^T = \\ = \tilde{\Omega}_{j\eta}(t) \circ \Psi_{j\eta},$$

$$(5.5) \quad \tilde{\Omega}_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda = \rho}^n (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) e_j e_\eta^T, \\ \Psi_{j\eta} = A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$(5.6) \quad P(t) = \tilde{\Omega}(t) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$(5.7) \quad \Omega(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda)} \prod_{\lambda=1, \lambda = \rho}^n (-s_\rho - s_\lambda) (e^{s_k t} - 1) e_j e_\eta^T.$$

3. Эрмитова компонента спектральных разложений решений уравнений Ляпунова имеет форму

$$(5.8) \quad P^H(t) = \frac{1}{2} (P(t) + P^*(t)), \quad P_{j\eta}^H(t) = \frac{1}{2} (P_{j\eta}(t) + P_{j\eta}^*(t)),$$

где спектральные разложения матриц  $P, P^*, P_{j\eta}, P_{j\eta}^*$  определяются формулами (5.2)–(5.7).

Случай кратного спектра матрицы  $A$

4. Решение дифференциальных уравнений Ляпунова (5.1) в форме произведений Адамара для кратного спектра матриц динамики имеют вид

$$(5.9) \quad P_{j\eta}(t) = \Omega_{j\eta}(t) \circ \Psi_{j\eta}, \quad \Psi_{j\eta} = A_j B B^T B_\eta, \\ P_{j\eta}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(t) A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$p_{cj\eta}(t) = \\ = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \sum_{\delta=1}^n \sum_{\rho=1}^{m_\delta} K_{\delta\rho j} \frac{(-1)^{m_\delta - \rho}}{(m_\delta - \rho)!} \left[ \frac{d^{m_\delta - \rho}}{ds^{m_\delta - \rho}} \left( \frac{s^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq \delta}^n (-s - s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=s-s_\delta} \right\},$$

$$K_{\delta\rho j} = \frac{1}{(\rho-1)!} \left[ \frac{d^{\rho-1}}{ds^{\rho-1}} \left( \frac{s^j}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq \delta}^n (-s - s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=s_\delta},$$

$$\Omega_{j\eta}(t) = p_{cj\eta}(t) e_j e_\eta^T,$$

$$P(t) = \Omega(t) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^T B_\eta,$$

$$(5.10) \quad \Omega(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(t) e_j e_\eta^T.$$

5. Эрмитова компонента решений уравнений Ляпунова имеет форму (5.8).

*Доказательство.* Решением дифференциального уравнения (5.1) является интеграл вида [1, 3, 25]

$$(5.11) \quad P(t) = \int_0^T e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau.$$

Применим к обеим частям уравнения Ляпунова преобразование Лапласа, считая начальные условия нулевыми и используя теорему о преобразовании Лапласа произведения вещественных функций времени, изображение которых представляет собой дробно-рациональную алгебраическую дробь [26]. В рассматриваемом случае эта дробь содержит один нулевой полюс, а все остальные полюса простые. Используя разложение резольвенты в ряд Фаддеева–Леверье и подставив полученные выражения в (5.11), получим изображение разложения решения дифференциальных уравнений Ляпунова (5.1) по комбинационному спектру матриц динамики в форме

$$P(s) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_\rho - s_\lambda)} A_j B B^T A_\eta^T +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_\rho - s_\lambda)} A_j B B^T A_\eta^T \frac{1}{s - s_k - s_\rho}.$$

Выполнив обратное преобразование, получим спектральное разложение решения дифференциальных уравнений Ляпунова (5.1) по комбинационному спектру матриц динамики во временной области в форме произведений Ада-

мара

$$P_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_\rho - s_\lambda)} \left[ \frac{e^{(s_k + s_\rho)t} - 1}{s_k + s_\rho} \right] A_j B B^T A_\eta^T =$$

$$= \Omega_{j\eta}(t) \circ \Psi_{j\eta},$$

$$\Omega_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_\rho - s_\lambda)} \left[ \frac{e^{(s_k + s_\rho)t} - 1}{s_k + s_\rho} e_j e_\eta^T \right],$$

$$\Psi_{j\eta} = A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$(5.12) \quad P(t) = \Omega(t) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_\rho - s_\lambda)} \left[ \frac{e^{(s_k + s_\rho)t} - 1}{s_k + s_\rho} \right] e_j e_\eta^T.$$

Равенство (5.12) выражает спектральное разложение решений дифференциальных уравнений Ляпунова по комбинационному спектру матрицы. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Используя тождество

$$(5.13) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_\rho - s_\lambda)} \equiv \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{N(s_k) N(-s_k)},$$

получим аналогичные разложения по простому спектру матрицы  $A$

$$P_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda = \rho}^n (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) A_j B B^T A_\eta^T =$$

$$= \Omega_{j\eta}(t) \circ \Psi_{j\eta},$$

$$\Omega_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda = \rho}^n (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) e_j e_\eta^T, \quad \Psi_{j\eta} = A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$P(t) = \Omega(t) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda = \rho}^n (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) e_j e_\eta^T.$$

Полученные разложения доказывают второе утверждение теоремы. Третье утверждение следует из утверждений 1 и 2.

Для доказательства утверждения 4 заметим прежде всего, что использование спектральных разложений по комбинационному спектру матрицы динамики приводит к громоздким выражениям, чего и не требуют формулировки утверждения 4, которые относятся к спектральным разложениям по кратному спектру матрицы динамики, основанному на спектрах прямой и дуальной антиустойчивой систем.

Сначала покажем, что вычисление интеграла Ляпунова вида (5.7) имеет особенности в случае кратных корней характеристического уравнения матрицы динамики. В силу свойств разложения резольвенты в ряд Фаддеева–Левереье получим выражения

$$(Is - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_j s^j}{N(s)}, \quad (Is - A^T)^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_j^T s^j}{N(s)}.$$

В соответствии с формулой обратного преобразования Лапласа для дробно-рациональной функции имеем

$$\mathcal{L}^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_j s^j}{N(s)} = \sum_{\delta=1}^n \sum_{\rho=1}^{m_\delta} K_{\delta\rho j} t^{m_\delta-\rho} e^{s_\delta t},$$

$$K_{\delta\rho j} = \frac{1}{(\rho-1)!} \left[ \frac{d^{\rho-1}}{ds^{\rho-1}} \left( \frac{\sum_{j=0}^{n-1} A_j s^j}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq \delta}^n (s - s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=s_\delta}.$$

Вычислим изображение интеграла Ляпунова, используя полученные выражения и теорему об изображении произведения двух дробно-рациональных функций времени, когда одно из перемножаемых изображений имеет кратные полюса [26]

$$(5.14) \quad \mathcal{L}[P_C(t)] = \mathcal{L} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} [p_{cj\eta}(t)] e_j e_\eta^T \right\} =$$

$$= s^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{\delta=1}^n \sum_{\rho=1}^{m_\delta} K_{\delta\rho j} \frac{(-1)^{m_\delta-\rho}}{(m_\delta-\rho)!} \left[ \frac{d^{m_\delta-\rho}}{ds^{m_\delta-\rho}} \left( \frac{s^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq \delta}^n (-s - s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=s-s_\delta} \right\} \times$$

$$\times A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$K_{\delta\rho j} = \frac{1}{(\rho-1)!} \left[ \frac{d^{\rho-1}}{ds^{\rho-1}} \left( \frac{s^j}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq \delta}^n (-s - s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=s_\delta}.$$

Отсюда следуют формулы

$$\begin{aligned}
 \Omega_{j\eta}(t) &= p_{cj\eta}(t) e_j e_\eta^T, \\
 P(t) &= \Omega(t) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^T B_\eta, \\
 (5.15) \quad \Omega(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(t) e_j e_\eta^T.
 \end{aligned}$$

Равенство (5.14) выражает спектральное разложение решений уравнений Ляпунова по кратному спектру матрицы  $A$ . Рассмотрим важный частный случай непрерывных линейных стационарных SISO (с одним входом и одним выходом) ЛТИ систем, представленных уравнениями состояния в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В этом случае грамианы управляемости и наблюдаемости в форме Адамара определяются формулами (2.6), (2.7)

$$\begin{aligned}
 P_{cj\eta}^F(t) &= P_{oj\eta}^F(t) = \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda=k}^n (-s_k - s_\lambda)} (e^{skt} - 1) e_j e_\eta^T, \\
 \tilde{\Omega}_{j\eta}(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda=k}^n (-s_k - s_\lambda)} (e^{skt} - 1), \quad \Psi_{j\eta} = e_j e_\eta^T, \\
 P_c^F(t) &= \tilde{\Omega}(t) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} e_j e_\eta^T, \\
 \tilde{\Omega}(t) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq k}^n (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1, \lambda=k}^n (-s_k - s_\lambda)} (e^{skt} - 1) e_j e_\eta^T.
 \end{aligned}$$

Мультипликатор конечного субграмиана управляемости прямо пропорционален вычету передаточной функции системы, умноженной на значение передаточной функции антиустойчивой системы при подстановке в нее значения корня  $s_k$  [27].

*Следствие 1.* Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда предел на бесконечности спектральных разложений решений дифференциальных уравнений Ляпунова (2.3) в форме произведений Адамара для кратного спектра матриц динамики имеют вид

$$\begin{aligned}
 P_{j\eta}(\infty) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(\infty) A_j B B^T A_\eta^T, \\
 \Omega_{j\eta}(\infty) &= p_{cj\eta}(\infty) e_j e_\eta^T,
 \end{aligned}$$

$$p_{cj\eta}(\infty) = \left\{ \sum_{\delta=1}^n \sum_{\rho=1}^{m_\delta} K_{\delta\rho j} \frac{(-1)^{m_\delta-\rho}}{(m_\delta-\rho)!} \left[ \frac{d^{m_\delta-\rho}}{ds^{m_\delta-\rho}} \left( \frac{s^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq \delta}^n (-s-s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=-s_\delta} \right\},$$

$$P(\infty) = \Omega(\infty) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^T B_\eta,$$

$$\Omega(\infty) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(\infty) e_j e_\eta^T.$$

*Доказательство.* Перейдем к пределу на бесконечности в выражении (5.14). В соответствии с теоремой о конечном значении имеем

$$p_{cj\eta}(\infty) = \left\{ \sum_{\delta=1}^n \sum_{\rho=1}^{m_\delta} K_{\delta\rho j} \frac{(-1)^{m_\delta-\rho}}{(m_\delta-\rho)!} \left[ \frac{d^{m_\delta-\rho}}{ds^{m_\delta-\rho}} \left( \frac{s^\eta}{\prod_{\lambda=1, \lambda \neq \delta}^n (-s-s_\lambda)^{m_\lambda}} \right) \right]_{s=-s_\delta} \right\},$$

$$P_{j\eta}(\infty) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(\infty) A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$\Omega_{j\eta}(\infty) = p_{cj\eta}(\infty) e_j e_\eta^T.$$

Отсюда следуют выражения предела на бесконечности спектральных разложений решений дифференциальных уравнений Ляпунова (3.3) в форме произведений Адамара

$$P(\infty) = \Omega(\infty) \circ \Psi, \quad \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^T B_\eta,$$

$$\Omega(\infty) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} p_{cj\eta}(\infty) e_j e_\eta^T.$$

Получены формулы спектральных разложений решений алгебраических уравнений Ляпунова в форме произведений Адамара для кратных собственных чисел.

*Следствие 2.* Рассмотрим линейную стационарную непрерывную МИМО ЛТИ динамическую систему вида (2.1). Примем, что система (2.1) устойчива, если не оговорено иное, полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы  $A$  различны. Рассмотрим наряду с уравнением (2.1) дифференциальное уравнения Ляпунова вида

$$(5.16) \quad \frac{dP(t)}{dt} = A^T P(t) + P(t) A + C^T C, \quad P(0) = 0_{n \times n}, \quad t \in [0, T],$$

где  $C^T C$  – вещественная матрица размера  $n \times n$ .

Тогда спектральное разложение конечного грамиана наблюдаемости в форме произведений Адамара имеет вид формул (5.2)–(5.8), (5.9)–(5.10), в которых матрица  $A_j B B^T A_\eta^T$  заменена на матрицу  $A_j^T C^T C A_\eta$ . Мультипликаторы конечных грамианов управляемости и наблюдаемости совпадают на полуинтервале  $[0, t) \in [0, T]$ . Утверждения 3 и 4 совпадают. Доказательство следствия 2 с учетом сделанной замены совпадает с доказательством следствия 1.

Следствие 3. Рассмотрим линейную стационарную непрерывную МИМО ЛТИ динамическую систему вида (2.1). Пусть выполнены условия леммы 2 и следствия 2 и определены бесконечные грамианы управляемости  $P_c$  и наблюдаемости  $P_o$ . Предположим, что спектры сингулярных чисел матриц грамианов  $\sigma_i$  простые. Выполним преобразование переменных системы (2.1) с матрицами  $T_{c2}$  и  $T_{o2}$  вида

$$x_{cd} = T_{c2}x, \quad x_{od} = T_{o2}x,$$

при которых грамианы приобретают диагональный вид

$$(5.17) \quad T_{c2}P_c T_{c2}^{-1} = P_{cd}, \quad P_{cd} = \text{diag} \{ \sigma_{c1} \ \sigma_{c2} \ \dots \ \sigma_{cn} \},$$

$$(5.18) \quad T_{o2}P_o T_{o2}^{-1} = P_{od}, \quad P_{od} = \text{diag} \{ \sigma_{o1} \ \sigma_{o2} \ \dots \ \sigma_{on} \},$$

где  $T_{c2}$  – матрица, составленная из правых собственных векторов грамиана  $P_c$ , а  $T_{c2}^{-1}$  – матрица, составленная из левых собственных векторов грамиана  $P_c$ ,  $T_{o2}$  – матрица, составленная из правых собственных векторов грамиана  $P_o$ , а  $T_{o2}^{-1}$  – матрица, составленная из левых собственных векторов грамиана  $P_o$ .

Тогда справедливы следующие спектральные разложения:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \text{tr } P_{cd} &= \sum_{i=1}^n \sigma_{ci}, \quad \text{tr } P_{od} = \sum_{i=1}^n \sigma_{oi}, \\ \text{tr } P_{cd}^{-1} &= \left[ p_{c0}^{-1} p_{c1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} + p_{c0}^{-1} p_{c2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{ci}}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + p_{c0}^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{ci}^{n-1}}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} \right] > 0, \\ \text{tr } P_{od}^{-1} &= \left[ p_{o0}^{-1} p_{o1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\dot{N}_o(\sigma_{oi})} + p_{o0}^{-1} p_{o2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{oi}}{\dot{N}_o(\sigma_{oi})} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + p_{o0}^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{oi}^{n-1}}{\dot{N}_o(\sigma_{oi})} \right] > 0, \end{aligned}$$

**Доказательство.** Докажем утверждения для случая грамианов управляемости.

Разложение резольвенты грамиана управляемости  $P_{cd}$  в ряд Фаддеева–Леверье имеет вид

$$(5.20) \quad (I\sigma - P_{cd})^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{P_{cd,n-1} \sigma_{ci}^{n-1} + \dots + P_{cd,1} \sigma_{ci} + P_{cd,0}}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} \frac{1}{\sigma - \sigma_i},$$

в котором  $P_{cdj}$  – матрицы Фаддеева для разложения грамиана, вычисляемые с помощью алгоритма Фаддеева–Леверье в виде

$$P_{cdj} = p_{cd,j+1}I + p_{cdj+2}P_{cd} + \dots + P_{cd}^{n-j-1},$$

где  $p_{cdj}$  – коэффициенты характеристического уравнения матрицы грамиана управляемости  $P_{cd}$ . В силу диагональности матриц  $P_{cd}$  матрицу  $P_{cdj}$  можно записать в виде

$$(5.21) \quad P_{cdj} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} p_{cd,n-j} \sigma_{cd1}^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{n-1} p_{cd,n-j} \sigma_{cd2}^j & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \sum_{j=0}^{n-1} p_{cd,n-j} \sigma_{cdn}^j \end{bmatrix}.$$

Из (3.2) получаем

$$P_{cd}^{-1} = -p_{cd0}^{-1}R_1 = p_{cd0}^{-1}[-p_{cd1}I - p_{cd2}P_{cd} - \dots - P_{cd}^{n-1}].$$

Отсюда следует

$$\text{tr } P_{cd}^{-1} = \left[ p_{cd0}^{-1} p_{cd1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} + p_{cd0}^{-1} p_{cd2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{ci}}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} + \dots + p_{cd0}^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{ci}^{n-1}}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} \right].$$

Это доказывает первое утверждение следствия. Положительность следа вытекает из положительности сингулярных чисел  $\sigma_{ci}$ . Исходный грамиан управляемости определяется из формулы

$$(5.22) \quad P_c = T_{c2}^{-1} P_{cd} T_{c2}.$$

Доказательство утверждения для случая грамианов наблюдаемости повторяет утверждения для случая грамианов управляемости.

Рассмотрим непрерывные линейных стационарные SISO (с одним входом и одним выходом) LTI системы, представленных уравнениями состояния в канонических формах управляемости и наблюдаемости. Первый этап преобразования уравнений вида (2.1) в каноническую форму управляемости состоит

в преобразовании системы вида (2.1)

$$x = R_c^F x_c,$$

$$\dot{x}_c(t) = A_c^F x_c(t) + b_c^F u(t), \quad x_c(0) = 0, \quad y_c^F(t) = c_c^F x_c(t), \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

$$A_c^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_c^F = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T.$$

Грамианы управляемости на этом этапе являются матрицами Сяо и имеют вид

$$P_c^F = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1\eta+1}.$$

*Следствие 4.* В некоторых случаях необходимо выполнить преобразование полученных уравнений состояния в новую форму, которая преобразует грамианы управляемости в диагональный вид

$$x_d = T_d x_c, \quad \dot{x}_d = P_{cd} x_d, \quad P_{cd} = \text{diag} \{ \sigma_{c1} \ \sigma_{c2} \ \dots \ \sigma_{cn} \}.$$

Новые переменные связаны с переменными исходной системы уравнением

$$(5.23) \quad x_d = T_d x_c = T_d (R_c^F)^{-1} x.$$

Отсюда следует, что матрица преобразования подобия  $T$  на втором этапе равна

$$T = T_d (R_c^F)^{-1}.$$

Очевидно, что грамианы управляемости исходной и преобразованной систем и их обратные грамианы связаны соотношениями

$$P_c = T^{-1} P_{cd} (T^{-1})^T = R_c^F T_{dc}^{-1} P_{cd} (T_{dc}^{-1})^T (R_c^F)^T,$$

$$P_c^{-1} = T^{-1} P_{cd}^{-1} (T^{-1})^T = R_c^F T_{dc}^{-1} P_{cd}^{-1} (T_{dc}^{-1})^T (R_c^F)^T.$$

## 6. Формулы спектральных разложений некоторых энергетических метрик

*Утверждение.* Рассмотрим МИМО ЛТИ системы (2.1) в канонической форме управляемости. Предположим, что эти системы устойчивы, матрицы  $A$ ,  $B$  являются вещественными, имеют простой спектр, их собственные числа  $s_k, s_\rho$  различны, не принадлежат мнимой оси плоскости собственных чисел и выполнены условия

$$s_k + s_\rho \neq 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad \rho = \overline{1, n_1}; \quad s_\rho, s_\rho \in \text{spec } A.$$

Тогда справедливы следующие разложения энергетических метрик граммиев управляемости по спектру матрицы динамики  $A$

$$\begin{aligned}
 1. \quad Vol \epsilon_x &= c_n \sqrt{\text{Det} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n \omega(n, s_k, j, \eta) A_j B B^T (A_\eta)^T \right]}, \\
 c_n &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}. \\
 2. \quad Vol \epsilon_y &= c_n \sqrt{\text{Det} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n \omega(n, s_k, j, \eta) C A_j B B^T (A_\eta)^T C^T \right]}, \\
 c_n &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}. \\
 3. \quad \text{tr } P_c &= \omega(n, s_k, 0, 0) \text{tr} \left[ A_0 B B^T (A_0)^T \right] + \\
 &\quad + \omega(n, s_k, 1, 1) \text{tr} \left[ A_1 B B^T (A_1)^T \right] + \dots \\
 &\quad \dots + \omega(n, s_k, n-1, n-1) \text{tr} \left[ A_{n-1} B B^T (A_{n-1})^T \right]. \\
 4. \quad \text{SISO LTI : tr } P_c^F &= \omega(n, s_k, 0, 0) + \omega(n, s_k, 1, 1) + \dots \\
 &\quad \dots + \omega(n, s_k, n-1, n-1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6.1) \quad 5. \quad E_{in} &= \frac{1}{2} x^T P^{-1} c x, \\
 P_c^{-1} &= \sum_{i=1}^n \frac{P_{cd, n-1} \sigma_{ci}^{n-1} + \dots + P_{cd, 1} \sigma_{ci} + P_{cd, 0}}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} \frac{1}{\sigma_{ci}}, \\
 P_{cdj} &= p_{cd, j+1} I + p_{cd, j+2} P_{cd} + \dots + P_{cd}^{n-j-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6.2) \quad 6. \quad E_{out} &= \frac{1}{2} x^T P_0 x, \\
 \text{MIMO LTI : } P_0 &= \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1, \eta+1} \right] \circ \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_j B B^T B_\eta \right],
 \end{aligned}$$

$$\text{SISO LTI : } P_0^F = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1, \eta+1}.$$

7. Индекс центральности энергетических метрик управляемости непрерывных многосвязных стационарных систем  $J_{CE}$

$$(6.3) \quad J_{CE} = \text{tr } P_c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\dot{N}(s_i) N(-s_i)} \frac{(s_i^2)^{i-1} - 1}{(-s_i^2 - 1)}.$$

## 8. Средняя минимальная энергия [19]

$$E_{avmin} = \frac{1}{n} \left[ p_{c0}^{-1} p_{c1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} + p_{c0}^{-1} p_{c2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{ci}}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} + \dots + p_{c0}^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{ci}^{n-1}}{\dot{N}_c(\sigma_{ci})} \right].$$

*Доказательство утверждения.* Разложения 1 и 2 следуют из известных формул для вычисления объема эллипсоида притяжения [6] в которые подставлены выражения спектральных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости. В таком виде формулы позволяют оценивать влияние собственных чисел матрицы динамики на объем эллипсоида притяжения. Утверждение 3 следует из формул (5.6) и (5.7). Разложение 4 следует из формул (2.6) и (2.7). Справедливость разложения 5 о степени достижимости сети (6.1) следует из [3], формул (5.19) и (5.21) следствия 3. Справедливость разложения 6 следует из [3], формул (5.6) и (5.7) теоремы 2. Индексы центральности энергетических метрик управляемости отдельных мод непрерывных многосвязных стационарных систем  $J_{CE}$ , как показано выше, можно определить через след матрицы Сяо. Последний является суммой геометрических прогрессий отдельных мод в соответствии с формулой (4.1) леммы 2. Разложение 8 следует из [19] и формулы (5.19) следствия 3. Заметим, что матрицы Сяо играют главную роль при вычислении большинства энергетических метрик, рассматриваемых выше. Энергетические метрики играют важную роль при анализе устойчивости линейных систем. Формулы (6.2), (6.3) показывают отрицательную синергию взаимодействия слабоустойчивых мод: чем ближе отдельные моды друг другу, тем большая энергия аккумулируется в группе мод, тем ближе система к границе устойчивости. Классический критерий степени устойчивости, основанный на расстоянии от ближайшего корня характеристического уравнения до мнимой оси, не обнаруживает подобной синергии.

## 7. Заключение

Применение преобразований уравнений состояния в канонические формы управляемости и наблюдаемости позволило упростить формулы спектральных разложений матриц грамианов. В статье в качестве спектров рассматриваются как спектры матрицы динамики системы, так и спектры сингулярных чисел грамианов. В статье получены новые спектральные и структурные разложения конечных грамианов в форме Адамара для решений алгебраических и дифференциальных уравнений Ляпунова линейных стационарных многосвязных систем с многими входами и многими выходами, в том числе и для случая кратных корней характеристического уравнения системы. При этом скалярная часть произведений Адамара зависит от времени, а матричная часть зависит от матриц Фаддеева в разложении резольвенты матрицы динамики и правых частей уравнений Ляпунова. Показано, что скалярная функция мультипликатора является инвариантом при преобразованиях подобия и при этом сильно зависит от разности собственных чисел матрицы

динамики и их кратности. Она формирует основные энергетические метрики базового энергетического баланса системы. Матричная часть произведений Адамара формирует весовые коэффициенты в спектральном разложении квадрата  $H_2$ -нормы передаточной функции матрицы динамики. Полученные результаты обобщены для класса динамических сетей. В этом случае большую роль играют конечные грамианы, являющиеся решением дифференциальных матричных уравнений Ляпунова. Формулы (2.1)–(2.8) дают ключ к решению оптимизационной задачи (2.3) и добавляют возможность контроля текущих запасов устойчивости. Степень устойчивости сети определяется с помощью энергетической метрики квадрата  $H_2$ -нормы передаточной функции матрицы динамики, что дает возможность не только установить факт диссипативности переходных процессов, но и исследовать степень их затухания для слабоустойчивых колебательных систем или систем с кратными корнями характеристического уравнения [26]. Степень управляемости (достижимости) сети связана с минимальной энергией, что позволяет ввести в рассмотрение новые метрики энергоэффективности управления в виде квадратичной формы, образованной ее обратным грамианом управляемости, получаемого с помощью спектральных разложений. Большое внимание уделено инвариантным энергетическим метрикам, образуемым с помощью матриц Сяо. В работе использованы известные энергетические метрики динамических сетей и разработаны методы и алгоритмы их спектральных разложений в качестве дополнительного инструмента для их анализа и оптимизации. Полученные результаты могут быть использованы для проектирования систем модального управления и решения задач оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств в системах управления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Philadelphia, 2005.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
3. *Benner P., Damr T.* Lyapunov equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. P. 686–711.
4. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Мухрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20.
5. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Теория автоматического управления. Уч. пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
7. *Сачков Ю.Л.* Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах. М.: Физматлит, 2006.
8. *Liu Y., Slotine J., Barabasi A.* Controllability of complex networks // Nature. 2011. V. 473. P. 167–173. <https://doi.org/10.1038/nature10011>

9. *Xiao C.S., Feng Z.M., Shan X.M.* On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proc. 1992. V. 139. No. 3. P. 286–290. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1992.0038>
10. *Mehr F.* A Determination of Design of Optimal Actuator Location Based on Control Energy. London/Publisher: City, University of London, 2018.
11. *Hauksdottir A., Sigurdsson S.* The continuous closed form controllability Gramian and its inverse // 2009 American Control Conference Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA June 10–12, 2009. P. 5345–5351. <https://doi.org/978-1-4244-4524-0/09>
12. *Sreeram V., Agathoklis P.* Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form // IEE Proc. D. Control. Theory Appl. 1991. V. 138. No. 6. P. 529–534. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1991.0074>
13. *Dilip A.S.A.* The controllability Gramian, the Hadamard product and the optimal actuator // Leader Sensor Select. Problem Nature Phys. 2015. V. 11. P. 779–786. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2919278>
14. *Мироновский Л.А., Соловьева Т.Н.* Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // АиТ. 2013. № 4. С. 59–79.
15. *Pasqualetti F., Zampieri S., Bullo F.* Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks // IEEE Transact. Control Network Syst. 2014. V. 1. No. 1. P. 40–52. <https://doi.org/10.1109/ACC.2014.6858621>
16. *Железнов К.О., Хлебников М.В.* Применение метода инвариантных эллипсоидов для решения линейной задачи слежения // Тр. МФТИ, 2013. Т. 5. № 4. С. 115–121.
17. *Lindmark G., Altafini C.* Minimum energy control for complex networks // Sci. Reports. 2018. V. 8. P. 3188. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-21398-7>
18. *Poolla B.K., Bolognani S., Dorfler F.* Optimal Placement of Virtual Inertia in Power Grids // IEEE Transact. Autom. Control. 2017. V. 62. No. 12. P. 6209–6220. <https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2703302>
19. *Summers T., Cortesi F., Lygeros J.* On submodularity and controllability in complex dynamical networks // IEEE IEEE Transact. Control Network Syst. 2015. V. 3. No. 1. P. 91–101.
20. *Yadykin I.B.* Spectral Decompositions of Gramians of Continuous Stationary Systems Given by Equations of State in Canonical Forms // Mathematics. 2022. V. 10. No. 13. P. 2339. <https://doi.org/10.3390/math10132339>
21. *Lindmark G., Altafini C.* Combining centrality measures for control energy reduction in network controllability problems // Proc. 2019 European Control Conference (ECC). 2019. P. 1518–1523.
22. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Изд-во Лань, 2009. 726 с.
23. *Hanson B., Peeters R.* A Faddeev Sequence Method for solving Lyapunov and Sylvester Equations // Linear Algebra Appl. 1996. V. 241–243. P. 401–430.
24. *Галляев А.А., Ядыкин И.Б.* О методах вычисления грамианов и использовании их в анализе линейных динамических систем // АиТ. 2013. № 2. С. 53–74.
25. *Ядыкин И.Б., Галляев И.А.* Спектральные разложения грамианов и энергетических метрик непрерывных неустойчивых систем управления // АиТ. 2023. № 12. С. 18–37.

26. *Iskakov A., Yadykin I.* Lyapunov modal analysis and participation factors applied to small-signal stability of power systems // *Automatica*. 2021. V. 132. С. Art. No. 109814. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109814>
27. *Bahtadze N.N., Cheresheko A.A., Elpashev D.V., Yadykin I.B., Sabitov R.A., Smirnova G.S.* Associative Model Predictive Control // *IFAC PapersOnLine*. Yokohama, Japan: Elsevier, 2023. V. 56. No. 2 P. 7330–7334.
28. *Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж.Л.* Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными параметрами. М.: Физматлит, 1961.  
*Gardner M.F., Barns J.L.* Transients in linear systems studied by the Laplace transformation // V. 1. Lumped-constant systems. New York, London. Wiley, Chapman and Hall, 1942.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.*

Поступила в редакцию 31.05.2024

После доработки 15.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024

© 2024 г. Е.Н. ХОБОТОВ, д-р техн. наук (e\_khobotov@mail.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## МОДЕЛИ ВЫБОРА ОБОРУДОВАНИЯ ДЛЯ МОДЕРНИЗАЦИИ ПРЕДПРИЯТИЙ С КОНВЕЙЕРНОЙ СБОРКОЙ ИЗДЕЛИЙ

Рассматриваются задачи выбора и замены оборудования, возникающие при модернизации машиностроительных предприятий, на которых сборка выпускаемые изделия производится на конвейерах. Для решения этих задач предлагаются методы, позволяющие определять типы и количество оборудования, которое следует приобрести и от которого целесообразно избавиться при модернизации предприятий.

*Ключевые слова:* моделирование, математические модели, линейное программирование, обрабатывающее оборудование, комплектующие, конвейер, сборка, изделие, модернизация.

DOI: 10.31857/S0005231024100086, EDN: YUOLDV

### 1. Введение

В последние годы происходит заметное усиление конкурентной борьбы, которое затрагивает практически все сферы производственной деятельности и приводит к значительному сокращению жизненного цикла производимой продукции. Это в свою очередь приводит к необходимости более часто обновлять выпускаемую продукцию и соответственно модернизировать производства для ее выпуска.

Подобная ситуация особенно заметна в автомобилестроительной промышленности, поскольку почти на всех автомобилестроительных предприятиях, по крайней мере, раз в каждые два–три года происходит обновление выпускаемых моделей автомобилей, что приводит к необходимости обновления и модернизации производств, на которых эти модели должны будут выпускаться.

Удачный выбор оборудования в процессе модернизации предприятий позволяет создавать рентабельные и конкурентоспособные производства, а устранение ошибок и просчетов, связанных с выбором оборудования, уже в процессе работы предприятий может потребовать весьма значительных дополнительных расходов.

Для выбора оборудования производственных систем и участков при их создании и модернизации были разработаны достаточно эффективные методы и модели [1, 2]. Однако эти методы оказались непригодными для выбора оборудования при модернизации предприятий из-за большой размерности и сложности возникающих задач. Поэтому для выбора оборудования при модернизации предприятий необходимо создание специальных моделей и методов.

В данной работе предлагаются модели и методы выбора оборудования для модернизации предприятий с конвейерной сборкой выпускаемых изделий. Эти модели и методы позволяют определять оборудование, которое целесообразно приобрести для предприятия и исключить из его состава. В предлагаемых моделях и методах используются расписания работы формируемых схем модернизации предприятий. Такие расписания работ позволят проверять и оценивать работоспособность каждой получаемой схемы модернизации предприятия при выполнении тестовых заказов и выбирать из них наиболее подходящую.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим постановку задачи выбора оборудования для модернизации предприятий с конвейерной сборкой выпускаемых изделий. Работа конвейеров происходит по последовательной схеме и при модернизации предприятия не требуется формирования новых подразделений и создания новых конвейеров.

Пусть на предприятии имеется  $M$  производственных подразделений. В них изготавливаются комплектующие для сборки изделий на  $R$  конвейерах.

После модернизации на  $r$ -м конвейере предприятия предполагается выпускать  $L_r$  ( $r = 1, \dots, R$ ) партий изделий разных типов, часть из которых являются новыми для предприятия. Некоторые из комплектующих могут закупаться на стороне. Состав и количество оборудования, находящееся во всех подразделениях предприятия до модернизации известны. Типы оборудования, пригодные для изготовления всех комплектующих для новых изделий и доступные для приобретения предприятием, также известны.

На каждом конвейере собираются партиями только «свои» изделия. Размер собираемой партии изделий  $l$ -го типа на  $r$ -м конвейере ( $l = 1, \dots, L_r$ ) не должен превышать величину  $\bar{N}_{lr}$ . Такие ограничения вызваны значительным временем, которое потребуется для изготовления большого количества комплектующих, а также необходимостью создания и обслуживания складов больших объемов для их хранения.

Во время сборки изделий на конвейерах в подразделениях предприятия изготавливаются комплектующие для сборки изделий следующих партий. Конвейеры переналаживаются, если на них будет производиться сборка изделия других типов. Если же на каких-то конвейерах будет продолжена сборка изделий того же типа, то их переналадка не требуется.

Производительности каждого конвейера и количество рабочих мест по сборке выпускаемых на нем типов изделий известны. Известны также времена переналадки каждого конвейера для сборки на нем выпускаемых партий изделий, что позволяет вычислять длительность сборки любой партии изделий.

Известен набор типовых производственных заданий  $J$ , которые по возможности должны содержать заказы, ожидающие предприятие после модернизации в условиях реальной работы. Типовые задания  $j$  ( $j = 1, \dots, J$ ) содержат

своем составе партии изделий тех типов, которые принадлежат множеству  $L$ . Разные задания содержат в своем составе партии с различным количеством изделий  $N_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ).

Для изготовления заданий из этого набора  $J$  может потребоваться модернизация предприятия с приобретением дополнительного оборудования имеющихся на предприятии типов и оборудования таких типов, которых ранее на предприятии не было. Часть имевшегося на предприятии оборудования может более не потребоваться.

В задаче требуется выбрать оборудование, которое следует приобрести для модернизации предприятия, и избавиться от ненужного более оборудования предприятия таким образом, чтобы при выделенных средствах на модернизацию предприятия  $D$ , каждое производственное задание  $j$  ( $j = 1, \dots, J$ ) из заданного набора могло быть изготовлено за время не превышающее  $\hat{T}_j$ .

### 3. Построение «каркасных» расписаний

Рассмотрим сначала принципы построения планов и расписаний работ по изготовлению поступающих заказов на предприятия с конвейерной сборкой выпускаемых изделий.

Изучение принципов и методов построения таких расписаний и оказывается весьма важным. Это связано не только с тем, что с помощью построенных расписаний работ по изготовлению типовых заданий на схемах модернизируемого предприятия можно проверить, выполняются ли эти задания в отведенное для этого время. Такие расписания работ позволяют более четко и ясно понять задачу модернизации предприятий и наметить пути ее решения, а также выбрать наиболее подходящую схему для модернизации предприятия.

Здесь следует отметить, что при проектировании различных объектов и изделий была замечена следующая особенность, связанная с проектируемыми объектами и изделиями. Проектирование изделий и объектов оказывается более удачным, когда проектируется несколько вариантов этого изделия или объекта и производится сравнение и анализ их достоинств и недостатков. На основе сравнения и анализа их характеристик может быть сформирован новый вариант, в котором по возможности устраняются выявленные недостатки и усиливаются имеющиеся преимущества. После этого из имеющихся вариантов на основе анализа и сравнения их параметров и характеристик выбирается лучший. В связи с этим при модернизации предприятий целесообразно формировать несколько схем модернизируемых предприятий и на основе сравнения и анализа их работы по выполнению тестовых заказов может быть сформирован новый вариант схемы модернизируемого предприятия и выбрана лучшая из имеющихся схем.

Для понимания задач модернизации предприятий и проверки выполнения тестовых производственных заданий в отведенное для этого время приходится строить согласованные расписания работ на уровне предприятия. Под такими расписаниями здесь понимаются расписания, в которых все по-

следующие операции по обработке каждой партии комплектующих должны начинаться только после завершения предыдущей операции, указанной в технологии ее изготовления.

Принципы и методы построения подобных расписаний описаны в [3, 4]. Согласно этим принципам из комплектующих, изготавливаемых для сборки выпускаемых изделий, формируются специальные группы. Каждая группа формируется так, чтобы в процессе ее изготовления все комплектующие, включенные в состав группы, поступали для обработки в производственные подразделения предприятия в одном порядке. Тем не менее, каждая комплектующая любой группы может обрабатываться по «своему» технологическому маршруту во всех подразделениях, в которых эту группу должны обрабатывать.

Затем строится расписание обработки таких групп, в котором определяется порядок обработки каждой группы в используемом подразделении предприятия. Для построения таких расписаний необходимо определить времена обработки каждой сформированной группы комплектующих в тех подразделениях предприятия, в которых эта группа обрабатывается. Порядок обработки таких групп в подразделениях предприятия известен из принципов их формирования. Для определения времени обработки группы комплектующих в соответствующем подразделении предприятия может строиться расписание обработки комплектующих этой группы на оборудовании подразделения. За время обработки каждой группы комплектующих в подразделении принимается время завершения обработки последней комплектующей группы на оборудовании этого подразделения. Построение расписаний работ в подразделениях может производиться с помощью традиционных методов [5–7], которые разрабатывались специально для построения таких расписаний и позволяют строить их достаточно быстро и хорошо.

Расписание групп комплектующих в подразделениях предприятия строится по таким же правилам, как и обычное расписание обработки деталей на станках в производственных системах. Порядок обработки групп комплектующих в подразделениях предприятия следует выбирать таким образом, чтобы общее время их обработки было бы по возможности меньшим.

Расписания обработки сформированных по таким принципам групп комплектующих в подразделениях предприятия в [3] были названы «каркасными» расписаниями.

Следует также отметить, что с помощью «каркасного расписания» можно достаточно быстро сформировать вариант расписания работ для предприятия, называемый развернутым «каркасным» расписанием.

В диаграмме Ганта развернутого «каркасного» расписания для каждого обрабатывающего оборудования любого подразделения выделяется отдельная ось абсцисс, по которой откладываются времена обработки комплектующих, изготавливаемых на данном оборудовании в этом подразделении. Расписания обработки всех групп комплектующих в подразделениях, в которых

эти группы обрабатываются, уже строились и должны быть, поскольку по ним определялись времена их обработки.

Имеющиеся диаграммы расписаний обработки групп комплектующих в подразделениях размещают в диаграмме развернутого «каркасного» расписания на тех позициях, которые соответствуют позициям этих подразделений и их оборудования.

Диаграммы расписаний обработки таких групп размещают в порядке, полученном при построении «каркасного расписания». Размещение расписания следующей группы комплектующих на позициях каждого подразделения в развернутой диаграмме может производиться только тогда, когда будет завершена обработка последней комплектующей из предыдущей группы. Поэтому времена завершения работ по «каркасному» и «развернутому» расписаниям будут совпадать.

Построенное таким образом развернутое «каркасное» расписание является согласованным расписанием на уровне предприятия. Действительно, в таком расписании обработка каждой комплектующей по времени будет начата на любом используемом оборудовании только после завершения ее обработки на предыдущем оборудовании по технологии ее изготовления.

Однако такой вариант расписания работ на предприятии будет не совсем удачным, поскольку в нем имеется много «невынужденных» простоев оборудования в местах «соприкосновения» расписаний обработки смежных групп комплектующих в каждом подразделении.

Для сокращения этих простоев производится операция «склеивания» расписаний, когда освободившееся в подразделении от обработки комплектующих обрабатываемой группы оборудование начинает сразу использоваться для обработки комплектующих следующей группы. Время завершения работ по такому расписанию заметно сокращается. Кроме того, по таким «склеенным» расписаниям на уровне предприятий можно определить времена начала и завершения всех операций по изготовлению комплектующих каждого изделия на всем используемом оборудовании предприятия от первой и до завершающей операции. Можно также узнать времена начала и завершения сборки каждой партии изделий.

Рассмотрим принципы построения «каркасных» расписаний с использованием описанных выше правил для обработки комплектующих в подразделениях предприятия и сборки из них на конвейерах изделий заказа.

Сначала для всех изделий заказа формируются группы комплектующих по приведенным выше правилам. Для изделий каждого типа формируются свои группы независимо от изделий других типов. После определения времени обработки сформированных групп комплектующих для всех изделий заказа в соответствующих подразделениях предприятия строится «каркасное» расписание обработки этих групп на предприятии.

Построение такого расписания начинается с построения расписания обработки групп комплектующих, используемых для сборки партий изделий из

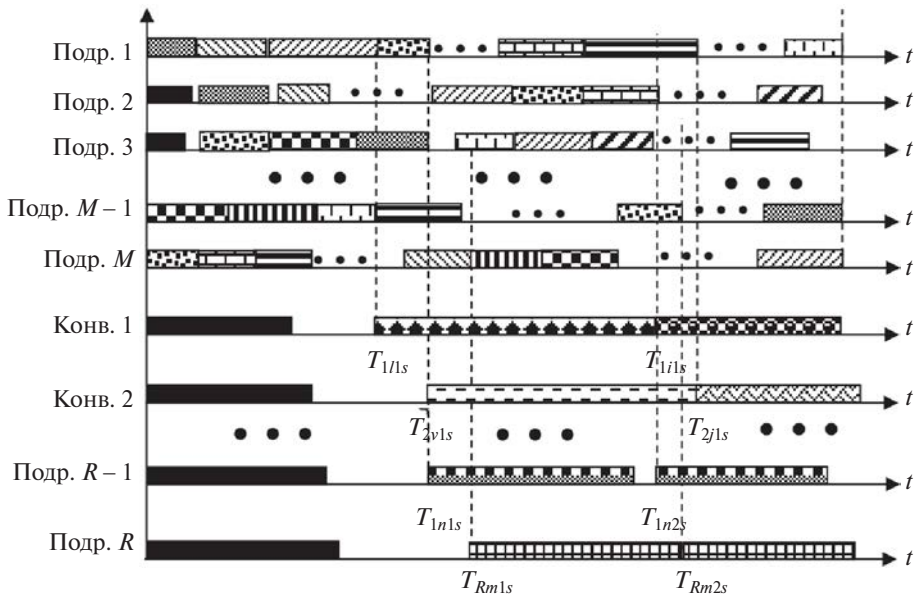


Диаграмма Ганта «каркасного» расписания изготовления комплектующих и сборки из них изделий.

поступившего заказа, которые в первую очередь будут собираться на конвейерах предприятия. Для его построения также могут использоваться традиционные методы построения расписаний, поскольку размерность «каркасного» расписания из-за объединения комплектующих в группы и оборудования в подразделения не оказывается значительной. Когда построение этих групп комплектующих будет завершено, начинается построение следующей его части. Эта часть включает расписание обработки групп комплектующих, из которых будут собираться изделия на каждом конвейере предприятия в следующую очередь. Ранее построенная часть расписания меняться не может, а новая часть расписания начинает строиться с момента освобождения подразделений предприятия от обработки групп комплектующих уже построенной части расписания.

После завершения обработки в подразделениях предприятия последней группы комплектующих каждой партии изделий, изготовленные комплектующие передаются на соответствующий конвейер для сборки. Такой процесс продолжается до завершения обработки групп комплектующих для последних партии изделий, собираемых на конвейерах предприятия, из поступившего заказа. Передача изготовленных комплектующих на соответствующий конвейер не оказывает влияния на работу производственных подразделений и на «каркасное» расписание по изготовлению комплектующих.

Обработку комплектующих и сборку из них изделий на предприятиях для лучшего их понимания удобно представить в виде «каркасного» расписания, пример которого для предприятия, имеющего в своем составе  $M$  производственных подразделений и  $R$  конвейеров, представлен на рисунке.

На этом рисунке по первым пяти осям абсцисс отмечают времена начала и завершения обработки групп комплектующих в подразделении, которому соответствует эта ось. На осях, помеченных, как «Подр. 1», «Подр. 2», ..., «Подр.  $M$ » отмечаются времена начала и завершения обработки групп комплектующих в первом, втором, ... и  $M$ -м подразделениях соответственно. На осях, помеченных, как «Конв. 1», «Конв. 2», ..., «Конв.  $R$ » отмечаются времена завершения сборки изделий на первом, втором, ... и  $R$ -м конвейерах соответственно. На этой диаграмме через  $T_{1l1s}$  обозначено время завершения обработки комплектующих для сборки на первом конвейере первой партии изделий  $l$ -го типа из  $s$ -го заказа, через  $T_{Rq2s}$  – время завершения сборки второй партии изделий  $q$ -го типа на  $R$ -м конвейере из  $s$ -го заказа. Прямоугольники, закрасненные на этой диаграмме черным цветом, отмечают времена проведения и завершения работ из предыдущего задания. Как видно из этой диаграммы Гантта, на осях, помеченных, как «Подр. 1», «Подр. 2», ..., «Подр.  $M$ » фактически представлено «каркасное» расписание обработки комплектующих для сборки изделий из поступившего заказа. По мере готовности комплектующих для сборки какой-либо партии изделий эти комплектующие передаются на соответствующий конвейер. Это, как уже отмечалось, не влияет на работу производственных подразделений и на «каркасное» расписание работ.

Если некоторая схема модернизация предприятия для выполнения, например,  $s$ -го типового задания будет сформирована, то диаграмма Гантта, представляющая «каркасное» расписание выполнения этого задания будет иметь вид, аналогичный тому, который представлен на рисунке. Кроме того, из такой диаграммы можно с достаточно хорошей точностью можно определить время выполнения задания. Из диаграммы этого расписания видно, что для выполнения  $s$ -го задания за время не превышающее  $\hat{T}_s$ , времена изготовления комплектующих и сборки из них изделий задания не должны превышать определенных величин.

Оценим время  $\tilde{T}_s$ , не позднее которого должны быть изготовлены комплектующие для сборки на конвейерах изделий из  $s$ -го производственного задания, чтобы время выполнения  $s$ -го задания не превышало  $\hat{T}_s$ . Для выполнения этого требования величина  $\tilde{T}_s$  определяется из соотношения

$$\tilde{T}_s = \hat{T}_s - \max_r T_{rns},$$

где  $T_{rns}$  – время сборки на  $r$ -м конвейере последней партии изделий из  $s$ -го задания.

Однако расписание работ на предприятии нельзя построить, не зная оборудование этого предприятия. Поэтому предлагается предварительно выбрать оборудование для схемы модернизируемого предприятия и построить для нее расписание работ по выполнению производственного задания. После анализа этого расписания проводится корректировка выбранного оборудования для формирования более подходящей схемы модернизируемого предприятия. Такой процесс будет описан в пункте 4 и продолжается, пока не будет получена наиболее подходящая схемы модернизируемого предприятия.

#### 4. Модель выбора оборудования

Рассмотрим принципы построения модели предварительного выбора оборудования для решения простейшей задачи модернизации предприятия с  $M$  производственными подразделениями и  $R$  конвейерами для сборки выпускаемых изделий.

Предварительно выбранное оборудование может быть использовано для построения «каркасного» расписания обработки комплектующих. Это позволит уточнить и скорректировать выбранное оборудование. Для предварительного выбора типов и количества необходимого оборудования используем балансовые ограничения для групп оборудования каждого типа в производственных подразделениях предприятия по времени.

Балансовые ограничения для имеющегося на предприятии оборудования, на котором обрабатываются комплектующие, имеющие единственный маршрут обработки, могут быть представлены в следующем виде:

$$(4.1) \quad \sum_{l=1}^L \left\{ \sum_{v \in V_{jm}^l} N_l n_{vl} t_{vj}^{lm} \right\} \leq \\ \leq (y_{mj} + \tilde{y}_{mj} - \bar{y}_{mj}) \left( \tilde{T}_s \eta_j^{ml} - \sum_{l=1}^L \sum_{v \in V_{jm}^l} \tau_{vj}^{lm} \right) \mu_{jm}, \quad j \in G_m,$$

где  $L$  – количество типов изделий в  $s$ -м производственном задании,  $V_{jm}^l$  – множество типов комплектующих  $l$ -го изделия, которые можно обрабатывать на  $j$ -м оборудовании  $m$ -го производственного подразделения,  $N_l$  – количество изделий  $l$ -го типа ( $l = 1, \dots, L$ ) в этом задании,  $n_{vl}$  – количество комплектующих  $v$ -го типа в  $l$ -м изделии,  $t_{vj}^{lm}$  – время обработки  $v$ -й комплектующей  $l$ -го изделия на  $j$ -м оборудовании  $m$ -го производственного подразделения,  $\eta_j^{ml}$  – коэффициент, определяющий ресурс времени использования оборудования  $j$ -го типа в течение интервала времени его работы,  $\mu_j^{ml}$  – коэффициент загрузки  $j$ -го оборудования из  $m$ -го производственного подразделения,  $\tau_{vj}^{lm}$  – время переналадки оборудования  $j$ -го оборудования из  $m$ -го производственного подразделения для изготовления  $v$ -й партии комплектующих  $l$ -го изделия,  $y_{mj}$  – количество единиц  $j$ -го оборудования, которое было в  $m$ -м производственном подразделении до модернизации,  $\tilde{y}_{mj}$  – количество единиц  $j$ -го оборудования, которое следует приобрести в процессе модернизации для  $m$ -го производственного подразделения,  $\bar{y}_{mj}$  – количество единиц  $j$ -го оборудования, от которых следует избавиться в процессе модернизации  $m$ -го производственного подразделения.

На предприятии также может быть оборудование, на котором обрабатываются комплектующие по не совсем удачным технологическим маршрутам обработки. Для таких комплектующих могут разрабатываться другие технологические маршруты с использованием как имеющегося, так и приобре-

таемого для предприятия оборудования. Для таких комплекующих могут разрабатываться другие технологические маршруты с использованием как имеющегося на предприятии оборудования, так и приобретаемого для него. В модели требуется выбрать из этих маршрутов наиболее подходящий.

Здесь, однако, следует отметить, что разработка технологического маршрута требует затрат времени и средств, и не всегда малых, особенно при проверке маршрута и его отладке для использования на постоянно работающем производстве.

Балансовые ограничения для имеющихся на предприятии типов оборудования, на котором могут обрабатываться комплекующие с несколькими маршрутами обработки, имеют следующий вид:

$$(4.2) \quad \sum_{l=1}^L \left\{ \sum_{i \in \tilde{V}_{jm}^l} N_{in_{il}t_{ij}^{lm}} + \sum_{v \in V_{jm}^l} \sum_{k \in K_{vj}^l} \theta_v^{kl} N_{ln_{vl}t_{vj}^{klm}} \right\} \leq \\ \leq (y_{mj} + \tilde{y}_{mj} - \bar{y}_{mj}) \left( \tilde{T}_s \eta_j^{ml} - \sum_{l=1}^L \sum_{v \in V_{jm}^l} \tau_{vj}^{lm} \right) \mu_{jm}, \quad j \in G_m,$$

где  $\theta_v^{kl}$  – целочисленные переменные типа  $[0,1]$ .

Величина  $\theta_v^{kl}$  в ограничениях (4.2) равна 1, если  $v$ -я комплекующая  $l$ -го изделия изготавливается на  $j$ -м оборудовании по  $k$ -му технологическому маршруту и нулю в противном случае.

Балансовые ограничения для вновь приобретаемого оборудования, на котором комплекующие могут обрабатываться по нескольким технологическим маршрутам, могут быть представлены в следующем виде:

$$(4.3) \quad \sum_{l=1}^L \left\{ \sum_{i \in \tilde{V}_{jm}^l} N_{in_{il}t_{ij}^{lm}} + \sum_{v \in V_{jm}^l} \sum_{k \in K_{vj}^{lm}} \theta_v^{kl} N_{ln_{vl}t_{vj}^{klm}} \right\} \leq \\ \leq y_{mj} \left( \tilde{T}_s \eta_j^{ml} - \sum_{l=1}^L \sum_{v \in V_{jm}^l} \tau_{vj}^{lm} \right) \mu_{jm}, \quad j \in \tilde{G}_m.$$

Балансовые ограничения для вновь приобретаемого оборудования, на котором комплекующие обрабатываются по единственному технологическому маршруту, имеют почти такой же вид, как ограничения (4.3). Отличие состоит в том, что в левой части ограничения из-за наличия одного маршрута обработки у комплекующих отсутствует слагаемое  $\sum_{v \in V_{jm}^l} \sum_{k \in K_{vj}^{lm}} \theta_v^{kl} N_{ln_{vl}t_{vj}^{klm}}$ .

Выбор технологических маршрутов изготовления комплекующих производится с использованием переменных  $\theta_v^{kl}$ , на которые накладываются сле-

дующие ограничения:

$$(4.4) \quad \sum_{k=1}^{K_v^l} \theta_v^{kl} = 1, \quad m = 1, \dots, M, \quad v \in \tilde{V}_m^l, \quad l \in \bar{L},$$

где  $\tilde{V}_m^l$  – множество комплектующих  $l$ -го изделия, у которых в конструкции или в технологии изготовления имеются изменения и для их изготовления в  $m$ -м подразделении требуется выбрать технологический маршрут изготовления из разработанных  $K_v^l$  маршрутов для обработки этой комплектующей,  $\bar{L}$  – множество изделий из сформированного задания, у которых в конструкции или в технологии изготовления комплектующих имеются изменения. Остальные обозначения определены выше.

Если  $v$ -я партия комплектующих  $l$ -го изделия может изготавливаться только по одному технологическому маршруту, то переменные  $\theta_v^{kl}$  и ограничение (4.4) в модель не включаются. Если отдельные части этой партии могут изготавливаться по разным технологическим маршрутам, то на переменные накладываются следующие ограничения  $0 \leq \theta_v^{kl} \leq 1$ , а величина  $\theta_v^{kl}$  показывает, какая часть этой партии комплектующих обрабатывается по  $k$ -му технологическому маршруту. Обычно для ранее производимых комплектующих, технологические маршруты обработки комплектующих которых уже имеются и эти маршруты не вызывают серьезных нареканий, новые маршруты не разрабатываются.

Средства, необходимые для приобретения дополнительного оборудования, с учетом средств, получаемых от реализации ненужного оборудования, не должны превышать средств, выделенных на проведение модернизации. Поэтому в модель включается следующее ограничение:

$$(4.5) \quad \sum_{m=1}^M \left( \sum_{j \in \Omega_m} \tilde{d}_j \tilde{y}_{mj} - \sum_{j \in G_m} \bar{d}_j \bar{y}_{mj} \right) \leq D + p_1,$$

где  $\Omega_m = G_m \cup \tilde{G}_m$ ,  $\tilde{d}_j$  – стоимость приобретения оборудования  $j$ -го типа,  $\bar{d}_j$  – стоимость реализации ненужного оборудования  $j$ -го типа,  $p_1$  – вспомогательная переменная, которую минимизируют в функционале.

Функционал  $\tilde{J}$ , минимум которого определяется в данной модели, имеет вид

$$(4.6) \quad \tilde{J} = \min \left\{ \alpha_1 \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \sum_{j \in \tilde{G}_m} \sum_{v \in V_{jm}^l} \sum_{k \in K_{vj}^{lm}} \left( \theta_v^{klm} N_l n_{vl} \tilde{c}_{vj}^{klm} \right) + \right. \\ \left. + \alpha_2 \sum_{m=1}^M \sum_{j \in \tilde{G}_m} b_{mj} T y_{mj} + \alpha_3 p_1 \right\},$$

где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  – весовые коэффициенты,  $\tilde{c}_{vj}^{klm}$  – затраты на изготовление комплектующей детали  $v$ -го типа для изделия  $l$ -го типа по  $k$ -му технологиче-

скому маршруту на оборудовании  $j$ -го типа в  $m$ -м производственном подразделении предприятия,  $b_{mj}$  – стоимость обеспечения работы и обслуживания оборудования  $j$ -го типа из  $m$ -го подразделения в течение единицы времени. Остальные обозначения определены выше.

Расчеты модели (4.1)–(4.6) сводятся к решению задачи целочисленного линейного программирования [8, 9].

Однако при расчетах этой модели нет необходимости получать точное целочисленное решение. Это связано с тем, что модель выбора оборудования (4.1)–(4.6) для модернизации реальных предприятий с конвейерной сборкой изделий, как правило, имеет весьма значительную размерность. Получение точного целочисленного решения для задач такой размерности с помощью существующих методов займет очень большое время.

С другой стороны, часть исходных данных в расчетах является приближенной. Кроме того, полученные в результате расчета модели данные о количестве приобретаемого и исключаемого из состава предприятия оборудования даже в случае получения точного решения не могут быть использованы для принятия решения о приобретении или исключении оборудования на предприятии. Дело в том, что в оптимизационных моделях не удается учитывать времена вынужденных простоев оборудования и ожидания начала обработки комплектующих в процессе их изготовления. Подобные простои практически всегда возникают при обработке деталей и заданий [5, 6] и могут заметно увеличивать время изготовления комплектующих. Времена вынужденных простоев удается определить только после построения расписаний изготовления комплектующих на предприятии.

В результате расчета модели определяется количество оборудования  $\tilde{y}_{mj}$ , которое надо дополнительно приобрести к имеющемуся на предприятии, а также количество оборудования  $\tilde{y}_{mj}$ , от которого целесообразно избавиться. Кроме того, определяется количество оборудования новых типов  $\tilde{y}_{mj}$ , которое надо приобрести для предприятия.

Если модель (4.1)–(4.6) при заданных и  $\hat{T}_s$  имеет решение при  $p_1$ , равном нулю, то производится проверка выполнения данного задания в отведенное для этого время. Для этого строится расписание обработки комплектующих и сборки из них изделий, включенных в задание.

Если построенное расписание работ по изготовлению комплектующих и сборки из них изделий задания завершится за время  $T_s$ , которое меньше отведенного времени  $\hat{T}_s$ , то полученная схема модернизируемого предприятия помещается в группу проверки схем.

Очень часто в качестве приемлемого решения задачи выбора оборудования для модернизации предприятий выбирается не только решение, в котором время изготовления заказа завершится не раньше отведенного времени, но также и решение с некоторым превышением этого времени. Обычно время изготовления  $s$ -го задания в таком случае может принадлежать заданному интервалу  $[\hat{T}_s + \Delta T]$ , где  $\Delta T$  определяет такой интервал времени.

Однако если модель (4.1)–(4.6) при заданном  $D$  имеет решение, в котором величина  $p_1$  отлична от нуля, то производится проверка.

Если величина  $p_1$  будет меньше заданной величины  $\Delta D$ , то по описанной выше схеме строится расписание обработки и по этому расписанию определяется время изготовления  $s$ -го задания  $\check{T}_s$ . Если это время будет меньше заданного времени с допустимой задержкой  $\Delta T_s$ , т.е.  $\check{T}_s \leq \hat{T}_s + \Delta T_s$ , то сформированная схема модернизируемого предприятия включается в группу проверки.

Однако если модель (4.1)–(4.6) при заданном  $D$  имеет решение, в котором величина  $p_1$  отлична от нуля и больше заданной величины  $\Delta D$ , то возникает весьма непростая ситуация.

В этой ситуации при средствах  $D$ , выделенных на модернизацию предприятия, невозможно приобрести оборудование, которое позволит предприятию выполнить  $s$ -е задание за время  $\hat{T}_s$ . Поэтому требуется принимать решение либо об изменении величин  $D$  и  $\hat{T}_s$ , либо о прекращении работ по модернизации предприятия на этом этапе деятельности предприятия и, возможно, о переносе ее на лучшие времена.

## 5. Изменение схемы модернизации предприятия

Рассмотрим ситуацию, когда принимается решение о продолжении работ по формированию подходящей схемы модернизируемого предприятия при новых значениях  $D$  и  $\hat{T}_s$ .

В этом случае требуется выбрать такую величину времени изготовления комплектующих для сборки  $s$ -го задания, чтобы при заданном  $\check{D}$  можно было сформировать такую схему модернизируемого предприятия, на которой  $s$ -е задание будет изготовлено за наименьшее время  $T_s$ . Величина  $\check{D}$  определяется возможностями предприятия и поэтому не изменяется.

Алгоритм, позволяющий определить такое время  $T_s$  для изготовления  $s$ -го задания, а также оборудование для модернизации предприятия можно представить по шагам следующим образом.

Обозначим через  $\bar{T}_{sr}$  время изготовления комплектующих для сборки  $s$ -го задания на  $r$ -й итерации алгоритма. При  $r = 1$  время  $\bar{T}_{s1} = \check{T}_s$ .

Шаг 1. Время  $\bar{T}_{sr+1}$ , в течение которого на  $(r + 1)$ -й итерации алгоритма требуется изготовить комплектующие, вычисляется с помощью соотношения  $\bar{T}_{sr+1} = \bar{T}_{sr} + \Delta \bar{T}_{sr}$ , где  $\Delta \bar{T}_{sr}$  – величина приращения. Следует переход к шагу 2.

Шаг 2. В модели (4.1)–(4.6) величина  $\check{T}_s$  заменяется величиной  $\bar{T}_{sr+1}$  и производится ее расчет. В результате расчета модели определяется новый состав оборудования для рассматриваемой схемы модернизируемого предприятия. Следует переход к шагу 3.

Шаг 3. Производится проверка. Если переменная  $p_1$  в полученном решении окажется равной нулю, то вычисляется разность  $\Delta \bar{T}_{sr+1} = \bar{T}_{sr+1} - \bar{T}_{sr}$  и следует переход к шагу 4. В противном случае полагаем  $r := r + 1$  и следует переход к шагу 1.

Шаг 4. Если величина  $\Delta\bar{T}_{sr+1}$  окажется больше заданной величины  $\Delta\bar{T}_1$ , то параметру  $\bar{T}_z$  присваивается значение  $\bar{T}_{sr}$  и вычисляется величина  $\bar{T}_s = \frac{\bar{T}_{sr+1} + \bar{T}_z}{2}$ . Следует переход к шагу 5. В противном случае следует переход к шагу 7.

Шаг 5. Производится расчет модели (4.1)–(4.6), в которой величина  $\bar{T}_s$  заменяется на  $\bar{T}_s$ . В результате расчета определяется переменная  $p_1$  и новый состав оборудования для рассматриваемой схемы модернизируемого предприятия. Следует переход к шагу 6.

Шаг 6. Если переменная  $p_1$  окажется больше нуля, то вычисляется разность  $\Delta\bar{T}_{sr+1} = \bar{T}_{sr+1} - \bar{T}_s$ , и следует переход к шагу 4. В противном случае  $\bar{T}_{sr+1}$  присваивается значение  $\bar{T}_s$ , вычисляется разность  $\Delta\bar{T}_{sr+1} = \bar{T}_{sr+1} - \bar{T}_{sr}$ , и следует переход к шагу 4.

Шаг 7. Для вновь выбранного состава оборудования схемы строится расписание изготовления заданного производственного задания. На основе построенного расписания работ определяется время изготовления этого задания  $T_{s(r+1)z}$ , а также время изготовления комплектующих  $\bar{T}_{sr+1}$ . Вычисления прекращаются.

## 6. Анализ и выбор лучшего варианта модернизации

Рассмотрим основные методы проверки работоспособности и сравнения работы собранных схем модернизируемого предприятия, а также методы выбора из них наиболее подходящей.

Проверка работоспособности сформированных схем модернизируемого предприятия является весьма важной и необходимой, поскольку она должна выявить основные ошибки и просчеты, которые могли возникнуть при модернизации предприятия. Выявление и устранение ошибок и просчетов в процессе «модельной» проверки работоспособности схем модернизируемого предприятия потребует гораздо меньших затрат времени и средств, чем в процессе работы неудачно модернизированных предприятий.

Сначала на основе исследования и анализа условий будущей работы модернизируемого предприятия формируется достаточное количество типовых заказов, а также желаемые сроки их выполнения. Формируемые заказы должны по возможности быть похожими на реальные заказы, которые будут и могут поступать на предприятие после модернизации. Такие заказы удобно сводить в долгосрочную производственную программу от полутора до двух лет, пример которой представлен в таблице.

**Таблица**

Состав заказа	Заказ 1-й	...	Заказ $l$ -й	...	Заказ $Q$ -й
Партия 1	500 шт	...	1200 шт	...	1100 шт
...	...	...	...	...	...
Партия $r$	1200 шт	...	400 шт	...	500 шт
...	...	...	...	...	...
Партия $L$	900 шт	...	1500 шт	...	1200 шт

Проверка каждой схемы модернизируемого предприятия производится путем моделирования работы схемы по изготовлению одной и той же производственной программы, включающей большое количество разнообразных заказов. В процессе моделирования работы каждой схемы строится расписание обработки заказов из такой программы и собирается информации об их выполнении.

В процессе «модельной» проверки работы всех отобранных схем модернизируемого предприятия появляется возможность тщательно проверить работу каждой из сформированных схем. Кроме того, в процессе проверки имеется возможность собирать необходимую информацию о выполнении схемами разных заданий, позволяющую определить разные характеристики схем, выявить их достоинства и недостатки, а также возможно наметить пути усиления достоинств и устранения недостатков.

Весьма важным и часто удачным путем усиления достоинств и устранения недостатков схем является замена неудачных фрагментов схемы удачными фрагментами других схем, а также создание на основе нескольких схем комбинированной схемы. Под фрагментами схемы здесь понимается состав оборудования производственных подразделений предприятия.

В качестве собираемой информации можно указать количество нарушений схемой времени, отведенного на выполнение каждого задания из сформированной программы, максимальную и среднюю величины нарушений схемой отведенного времени выполнения заданий и, суммарную величину таких нарушений. Кроме этой информации собирается информация о максимальной, минимальной и средней загрузке выбранного оборудования каждой схемы, о затратах на выполнение каждого задания и обслуживание выбранного оборудования, о простоях конвейеров в ожидании комплектующих и т.д.

На основе такой «модельной» проверки и анализа собранной информации по выполнению значительного количества заданий оценивается, проверяется и анализируется работоспособность, пригодность и эффективность работы рассматриваемой схемы модернизируемого предприятия, выявляются просчеты и недостатки в ее работе, проводится сравнение работы различных схем, а также выбор из них наиболее подходящей.

Часто сравнение работы различных версий подсказывает, как и за счет чего можно расширить и усилить достоинства создаваемого объекта и каким образом можно устранить значительное количество его недостатков.

Одной из важнейших проблем выбора наиболее подходящей версии создаваемого объекта или изделия из имеющихся альтернатив является проблема, состоящая в том, что значения одних характеристик у какой-либо сравниваемой версии оказываются лучше, чем у других, а других – хуже. Как правило, очень редко существует такая версия, у которой все характеристики оказываются лучше, чем у других.

Для решения проблем выбора в таких случаях могут быть использованы идеи и методы принятия решений и многокритериальной оптимизации [8].

В этом случае собранные характеристики работы разных схем модернизации предприятия, из которых будет производиться выбор наиболее подходящей схемы, удобно рассматривать как критерии. Наиболее подходящим для выбора лучшей схемы модернизируемого предприятия является метод уступок [8, 9]. Рассмотрим кратко одну из версий этого метода для выбора наиболее подходящей схемы модернизируемого предприятия из  $\tilde{L}$  проверяемых схем.

Пусть для каждой схемы  $i$  ( $i = 1, \dots, \tilde{L}$ ) модернизируемого предприятия известны величины  $\tilde{m}$  характеристик. Такие характеристики собираются в описанном выше процессе проверки работоспособности схем и рассматриваются как критерии.

Для каждой схемы сравниваемые характеристики ее работы удобно представить в виде компонентов вектора, которые определяют величины критериев в порядке убывания их важности. Первая компонента этого вектора определяет величину наиболее важной характеристики схем. В таком векторе  $\vec{F}_i^T = |a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{\tilde{m}i}|^T$  для  $i$ -й схемы ( $i = 1, \dots, \tilde{L}$ ), который назовем вектором критериев,  $j$ -я компонента  $a_{ji}$  определяет  $j$ -ю ( $j = 1, \dots, \tilde{m}$ ) по важности характеристику рассматриваемой  $i$ -й схемы.

Для каждого критерия, т.е. компоненты этого вектора, задаются величины уступок  $d_j$  ( $j = 1, \dots, \tilde{m}$ ). Если требуется, чтобы значение первой характеристики было меньшим, то величина уступки  $d_1$  прибавляется к минимальной из величин  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1L}$ , т.е. к  $\tilde{a}_1 = \min \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1L}\}$ , и определяется интервал  $[\tilde{a}_1, \tilde{a}_1 + d_1]$ .

Если требуется, чтобы значение первой характеристики было больше, то величина уступки  $d_1$  вычитается из величины  $\tilde{a}_1$ , где  $\tilde{a}_1 = \max \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1L}\}$ , и определяется интервал  $[\tilde{a}_1, \tilde{a}_1 - d_1]$ . Тогда те схемы, у которых первые компоненты вектора критериев попадают в соответствующий интервал, считаются эквивалентными и только по этим схемам продолжается дальнейшее сравнение. Остальные схемы, у которых первые компоненты вектора критериев не попадают в соответствующий интервал, из дальнейшего рассмотрения исключаются. Такая процедура повторяется для следующих компонентов оставшихся векторов  $\vec{F}_i^T = |a_{2i}, a_{3i}, \dots, a_{mi}|^T$  ( $i = 1, \dots, \tilde{L}$ ), пока не останется одна схема.

Если из сформированных схем не удастся выбрать подходящую схему для модернизируемого предприятия, то по описанной выше процедуре или путем комбинирования уже полученных схем, или с использованием модели (4.1)–(4.6) при других исходных данных формируются новые схемы модернизации предприятия и весь описанный выше процесс проверки, корректировки и выбора схем повторяется.

С использованием методов построения «каркасных» расписаний изготовления комплектующих и расписаний транспортировки деталей между производственными подразделениями можно определить необходимое количество транспортных средств для доставки деталей от одного подразделения предприятия к другому для продолжения обработки, а также определить необходимые объемы складов для межоперационного хранения комплектующих. Однако, к сожалению, объем статьи не позволяет даже кратко описать идеи и принципы создания и работы этих методов.

## **7. Другие задачи выбора оборудования для предприятий**

Рассмотрим кратко возможности использования предложенных методов для решения других задач выбора оборудования.

Во втором пункте работы предполагалось, что при модернизации предприятия не требуется формирования новых подразделений и создания новых конвейеров. Однако эти предположения не являются принципиальными. Предложенные в работе модели выбора оборудования и методы построения расписаний работ могут использоваться при выборе оборудования и без их выполнения.

Более того, с их помощью можно решать задачи, возникающие на рассматриваемых предприятиях, которые можно назвать задачами «что будет, если». В этих задачах требуется определить, «что будет, если» произойдут или будут внесены изменения в структуру и деятельность предприятия, и оценить результаты таких изменений.

Среди таких задач можно выделить задачи изменения структуры предприятия, в которых рассматривается создание новых или ликвидация неэффективных подразделений, объединение или разделение действующих, изменение на предприятии количества конвейеров для сборки выпускаемых изделий. Кроме того, к подобным задачам относятся задачи, связанные с увеличением, сокращением или изменениями состава выпускаемой продукции, задачи определения и изменения средств, выделяемых на проведение модернизации.

Относятся к этим задачам также задачи перераспределения оборудования между подразделениями, задачи замены и пополнения оборудованием подразделений предприятия.

Для решения этих задач с использованием предлагаемых методов определяется структура модернизируемого предприятия, включающая выбранное количество производственных подразделений и количество конвейеров с назначением собираемых на них изделий. Для вновь осваиваемых изделий определяются комплектующие, которые на оборудовании, имеющемся на предприятии, обработаны быть не могут. Выбираются типы оборудования, которые обеспечат их необходимую обработку, и эти типы распределяются по существующим или создаваемым подразделениям предприятия.

Затем для комплектующих вновь осваиваемых изделий формируются технологические маршруты их обработки с учетом имеющегося и приобретаемого оборудования в подразделениях предприятия. Для комплектующих выпущенных изделий формируются альтернативные технологические маршруты обработки в случае проблем с имеющимся маршрутом.

После этого с помощью модели (4.1)–(4.6) определяется количество оборудования каждого типа, которое следует приобрести для соответствующих подразделений предприятия. Затем для полученной схемы предприятия по описанным выше правилам производится построение расписания изготовления заданного производственного задания.

По аналогичной схеме с небольшими изменениями с помощью предложенных методов может производиться выбор оборудования для вновь создаваемых предприятий.

При этом работа всех схем модернизируемого предприятия, полученных в результате внесения интересующих изменений, может быть проверена на выполнении тестовых заданий. По результатам их выполнения на проверяемых схемах могут быть собраны интересующие характеристики их работы, по которым можно наглядно проверить внесенные или возникающие изменения, а также оценить их последствия.

## 8. Заключение

Совместное использование разработанной модели выбора оборудования и методов построения расписаний работы модернизируемого предприятия позволяет:

- достаточно быстро формировать и оценивать различные схемы модернизации предприятия на разных наборах исходных данных;
- представить с помощью диаграмм Ганта, таблиц и графиков «модельную» работу каждого подразделения сформированной схемы модернизации предприятия по выполнению тестовых заданий;
- обоснованно оценить затраты на приобретение оборудования и возможности полученной при этих затратах схемы модернизируемого предприятия;
- производить тщательную и всестороннюю «модельную» проверку работоспособности каждой отобранной схемы модернизации предприятия;
- производить в процессе проверок отобранных схем сбор информации для последующего анализа их работы и определения характеристик;
- выявить в процессе проверок отобранных схем значительное количество просчетов и ошибок при выборе оборудования для модернизации предприятий;
- на основе анализа, собранных характеристик и работы отобранных схем произвести обоснованный выбор наиболее подходящей для модернизации предприятия.

Затраты времени на проведение всесторонней проверки работоспособности выбираемых схем модернизации предприятий с помощью предложенных моделей и методов оказываются не очень большими.

Однако затраты времени и особенно средств на устранения ошибок и просчетов, а также упущенная прибыль в процессе работы неудачно модернизированных предприятий в разы будут превышать затраты на проведение модельной проверки и выбора схем модернизированных предприятий.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов К.С., Хоботов Е.Н. Модели выбора и замены оборудования в производственных системах машиностроительных предприятий // *АиТ*. 2015. № 2. С. 125–140.
2. Хоботов Е.Н. Моделирование в задачах реинжиниринга производственных систем // *АиТ*. 2001. № 8. С. 168–178.
3. Хоботов Е.Н. О некоторых моделях и методах решения задач планирования в дискретных производственных системах // *АиТ*. 2007. № 12. С. 85–100.
4. Сидоренко А.М., Хоботов Е.Н. Агрегирование при планировании работ на машиностроительных предприятиях // *ТИЗВ. РАН. ТиСУ*. 2013. № 5. С. 132–144.
5. Bruker P. *Scheduling Algorithms*. Leipzig: Springer, 2007. 371 p.
6. Лазарев А.А. *Теория расписаний. Методы и алгоритмы*. М.: ИПУ РАН, 2019.
7. Хачатуров В.Р., Веселовский В.Е., Зотов А.В. и др. *Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности*. М.: Наука, 2000.
8. Моисеев Н.Н. *Математические задачи системного анализа*. М.: Наука, 1981.
9. Волков И.К., Загоруйко Е.А. *Исследование операций*. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галляевым.*

Поступила в редакцию 31.05.2024

После доработки 08.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024

© 2024 г. А.М. САЛЬНИКОВ (salnikov@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;  
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва),  
А.В. БАТОВ, канд. физ.-мат. наук (batov@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;  
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва),  
И.Э. СТЕПАНОВА, д-р физ.-мат. наук (tet@ifz.ru),  
Т.В. ГУДКОВА, д-р физ.-мат. наук (gudkova@ifz.ru)  
(Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва)

## О ВЫБОРКАХ ДАННЫХ СПУТНИКОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МАРСА<sup>1</sup>

Исследуются проблемы формирования выборок данных спутниковых измерений для построения моделей магнитного поля Марса. Предложено и реализовано несколько подходов к построению выборок данных. С помощью регионального метода S-аппроксимаций построены аналитические аппроксимации магнитного поля, представлены аналитические продолжения поля к единой выбранной высоте. Расчеты проведены для области Марса, включающей в себя места посадки космического аппарата миссии InSight и китайского ровера «Чжужун». Моделирование проводилось на основе выборок данных из калиброванных данных insitu.calibrated уровня 2 миссии MAVEN.

*Ключевые слова:* Марс, магнитное поле, выборки данных, аналитическое продолжение, метод S-аппроксимаций.

DOI: 10.31857/S0005231024100097, EDN: YUNWGZ

### 1. Введение

Создание магнитометров для спутниковых измерений с целью измерения магнитного поля планеты является очень сложной задачей [1]. Первыми космическими аппаратами, получившими измерения магнитного поля Марса, были автоматические межпланетные станции Mariner 4 (пролетел на расстоянии 9850 км), «Марс-3» (максимальное сближение ~1500 км), «Марс-2», «Фобос», «Фобос-2» (см. обзор [2]). Авторы работы [2] считают, что в начале 1972 г. (примерно за 25 лет до MGS) «Марс-3» обнаружил магнитное поле марсианской коры.

До запуска Mars Global Surveyor (MGS) в 1996 г. о магнитном поле Марса было мало информации, а его происхождение вызывало споры. Предыдущие миссии давали лишь верхнюю оценку значений интенсивности магнитного момента планеты [3].

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-27-00392, <https://rscf.ru/project/23-27-00392/>).

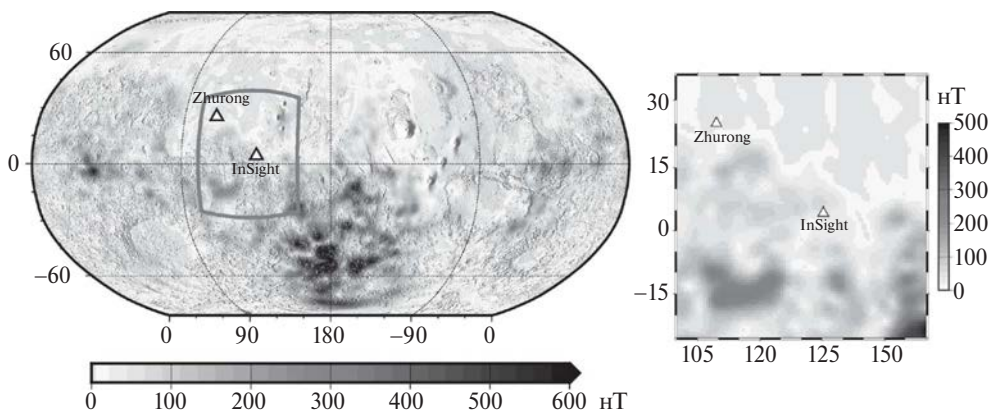


Рис. 1. Модель [12] магнитного поля Марса. Справа показана область, исследуемая в данной работе. Модель описывает поле на высоте 150 км.

Гипотеза о том, что на Марсе нет глобального магнитного поля, подтвердилась благодаря миссии MGS. Космический корабль MGS работал на марсианской орбите с 1997 по 2006 гг. и стал первой миссией, обеспечившей измерения магнитного поля Марса на достаточно малой высоте, чтобы выявить характеристики уникального марсианского магнитного поля. С сентября 1997 г. наблюдения векторного магнитного поля были получены с более чем 1000 эллиптических орбит с точкой наибольшего сближения с планетой на высоте от 85 до 170 км [4].

На планете была обнаружена довольно сильная намагниченность южного полушария. На основе данных MGS было построено много карт и моделей магнитного поля планеты [3, 5–11].

Благодаря миссии Mars Atmosphere and Volatile Evolution (MAVEN), работающей на орбите Марса с осени 2014 г. по настоящее время, поступают новые данные, которые удалось объединить с данными MGS, что позволило улучшить модели магнитного поля планеты [12–14]. На рис. 1 – модель [12] интенсивности магнитного поля Марса на высоте 150 км. На борту космического аппарата MAVEN, как и на MGS, на солнечных панелях установлены два феррозондовых магнитометра. В отличие от MGS аппарат MAVEN имеет неполярную эллиптическую орбиту, его перицентр составляет около 150 км (минимальная высота над эллипсоидом – 117 км).

Хотя вокруг истории и эволюции магнитного поля Марса остается множество вопросов, сейчас общепризнано, что планета когда-то имела мощное глобальное магнитное поле. Это поле создавалось «динамо-машиной», работающей в ядре планеты на протяжении достаточно долгого времени, в результате минералы приобрели сильную намагниченность, сохранившуюся до сих пор и предоставляющую информацию о прошлом Марса [12].

Большинство сегодняшних гипотез об истории и эволюции марсианского магнитного поля строились на моделях, которые были основаны на измерениях магнитного поля космическими аппаратами MGS и MAVEN.

Первые измерения магнитного поля на поверхности планеты были проведены благодаря миссии Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transport (InSight), успешно совершившей посадку на поверхность Марса 26 ноября 2018 г. Магнитометр посадочного модуля миссии измерил поле на поверхности, которое оказалось в 7–10 раз сильнее, чем предсказывалось с помощью глобальных моделей на основе орбитальных данных [15]. Это различие в измерениях подчеркивает, что некоторые аспекты магнитного поля, такие как его локальные аномалии или структуры малых масштабов, не могут быть адекватно зафиксированы при наблюдениях с орбиты.

14 мая 2021 г. посадочный модуль китайской миссии «Тяньвэнь-1», на которой находился ровер «Чжужун», совершил мягкую посадку на равнине Утопия, в точке  $25^{\circ}03$  северной широты  $109^{\circ}55$  восточной долготы. В том же году ровер преодолел путь длиной в один км и измерил очень слабое магнитное поле вдоль своего маршрута. Измеренная интенсивность магнитного поля составила одну десятую от прогнозируемых значений [16]. Данных о магнитных измерениях с орбитального аппарата «Тяньвэнь-1» пока немного, в открытом доступе имеются только дневные данные на малых высотах.

## 2. Основные подходы к моделированию магнитного поля Марса

Метод эквивалентных диполей ESD (Equivalent Source Dipoles) основан на предположении, что происхождение измеренного магнитного поля может быть смоделировано как сумма вкладов большого количества дипольных источников, равномерно распределенных под поверхностью планеты.

Этот метод обладает рядом достоинств: он менее чувствителен к неравномерности распределения данных; позволяет детально моделировать локальные магнитные аномалии, что особенно важно для анализа магнитного поля планет с неровной поверхностью, такой как Марс. Метод дает возможность использовать как низкоорбитальные, так и высокоорбитальные данные для создания единой модели магнитного поля.

Одним из основных недостатков ESD метода является то, что он не позволяет экстраполировать поле ниже высоты, которая в первом порядке равна среднему расстоянию между соседними диполями.

Метод ESD применялся в нескольких исследованиях для построения моделей, описывающих магнитное поле Марса в глобальном масштабе [3, 10, 12, 17].

В [9] используется метод сферических гармоник для моделирования магнитного поля литосферы Марса. Этот метод основан на разложении магнитного поля на компоненты с использованием функций сферических гармоник, что позволяет представить глобальное поле как сумму вкладов различных гармонических компонент. Для минимизации влияния выбросов использовалась модифицированная норма Хубера. В [14] для построения модели используются данные и MGS, и MAVEN.

В [18] предлагается инновационный подход с использованием метода PINN (Physics-Informed Neural Networks), который интегрирует физические принципы в нейронные сети для создания улучшенной модели магнитного поля марсианской коры. Этот метод применяет объединенные данные из миссий MGS и MAVEN, что позволяет достичь высокой детализации и повысить точность моделирования.

В данной работе был применен метод S-аппроксимаций, который более подробно описан ниже.

### 3. S-аппроксимации

В данной работе используется метод линейных интегральных представлений, который позволяет аппроксимировать поле через суммирование простых и двойных слоев (теория потенциала), размещенных на определенных носителях ниже заданного рельефа. Одним из вариантов этого метода являются S-аппроксимации [19–21], представляющие в итоге относительно простые аналитические формулы для расчета матричных элементов при решении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Метод S-аппроксимаций обладает высокой гибкостью и универсальностью, позволяя не только создавать высокоточные аппроксимации магнитного поля на основе больших объемов спутниковых данных, но и проводить различные преобразования, включая построение аналитических продолжений модельного поля в двух направлениях: от источников к наблюдаемым точкам и от наблюдаемых точек к источникам, позволяя, в частности, приводить данные к одной высоте. Кратко опишем суть S-аппроксимаций. Пусть имеется  $N$  измерений ( $\geq 10^4$ ). В первом уравнении отделяем полезный сигнал от помех (шума).

$$(1) \quad f_{i,\delta} = f_i + \delta f_i, \quad i = \overline{1, N},$$

$f_i$  – полезный сигнал,  $\delta f_i$  – шум. Выполняются следующие соотношения:

$$(2) \quad f_i = \sum_{r=1}^R \int_{M_r} \rho_r(\xi) Q_r^{(i)}(\xi) d\mu_r(\xi),$$

где  $\rho_r(\xi)$  – неизвестные функции,  $Q_r^{(i)}(\xi)$ ,  $r = \overline{1, R}$ ,  $i = \overline{1, N}$  – заданные функции,  $\mu_r(\xi)$  – заданные меры на  $M_r$ , а  $M_r$  – множества ассоциированных точек (в общем случае в  $R^n$ ,  $n \geq 1$ ). Неизвестные функции  $\rho_r(\xi)$  можно трактовать как плотности простого и двойного слоев, расположенных на определенной поверхности, которая может быть представлена плоскостью, двугранным углом или сферой. Эти плотности можно считать проекциями магнитных источников на поддерживаемые магнитные массы, хотя сами массы имеют трехмерную структуру. Основной метод нахождения функций  $\rho_r(\xi)$  является итеративным и напоминает метод Ньютона. В ходе каждой итерации в метод линейного интегрального представления вносятся модификации по сравнению с предыдущим шагом. В общем случае метод нахождения  $\rho_r(\xi)$  (определение интегральных представлений значений  $f_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ) заключается в постановке

и решении условно-вариационной задачи. В итоге задача сводится к решению СЛАУ

$$(3) \quad A\lambda = f_\delta, \quad f_\delta = f + \delta f,$$

где  $\lambda$  – вектор-столбец размерности  $N$ , который необходимо определить, матрица  $A$  – симметричная положительно определенная матрица размерности  $N \times N$  с натуральными элементами (положительная на конусе),  $f_\delta$  – вектор-столбец размерности  $N$ , представляющий наблюдаемый магнитный функционал, который выражается как сумма вектора полезного сигнала  $f$  и вектора помех  $\delta f$ . Невозможно точно и объективно изолировать ошибки и разделить  $f_\delta$  на  $f$  и  $\delta f$ .

Если  $f_{i,\delta}$  представляют собой измеренные значения аномального магнитного поля, то такие значения рассматриваются как интегральное представление аномального поля количественного типа, для описания которого используется термин «метрологический». В одних и тех же натурных данных можно найти множество метрологических линейных интегральных аппроксимаций. Таким образом, поиск устойчивого приближенного решения СЛАУ является ключевой вычислительной процедурой в S-аппроксимациях.

В данной работе идеализированная модель Марса представлена в виде сферы радиуса  $R_0$ , в то время как реальная замкнутая поверхность  $S$  считается незначительно отклоняющейся от данной сферы, оставаясь внутри нее. На поверхности  $S$  в определенных точках заданы значения гармонической функции, определенной во внешней области сферы. Эта функция представляет собой потенциал магнитного поля, выраженный через известные компоненты. В качестве таких компонент могут выступать, например, первая вертикальная производная потенциала на заданном рельефе над физической поверхностью Марса или одна из измеренных компонент вектора магнитной индукции.

Для аппроксимации аномального магнитного поля используются модели простого и двойного слоев, распределенных по двум концентрическим сферам, расположенным под поверхностью планеты. Выбор данной модели обусловлен относительной простотой и удобством формата элементов матрицы, что обеспечивает высокую скорость вычислений.

$$(4) \quad \begin{aligned} a_{ij} = a_{ji} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( Q_i^{(1)}(\xi) Q_j^{(1)}(\xi) + Q_i^{(2)}(\xi) Q_j^{(2)}(\xi) \right) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= \frac{2\pi}{r_i r_j \sqrt{h_i h_j}} \left( 1 + \frac{1}{4r_i r_j h_i h_j} \right) \times F \left( 2 \tan^{-1} \left( \sqrt{h_i h_j} \right), \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha_{ij})}{2}} \right) - \\ &\quad - \frac{\pi \left( 3h_i^2 h_j^2 - 4h_i h_j \cos(\alpha_{ij}) + 1 \right)}{r_i^2 r_j^2 h_i h_j \left( \sqrt{1 - 2h_i h_j \cos(\alpha_{ij}) + h_i^2 h_j^2} \right)^3}, \end{aligned}$$

где  $F$  – неполный эллиптический интеграл первого рода [22].

Таким образом матрица  $A$  интегрирует в себе как геометрию измерений, так и информацию об источниках поля. В этом контексте обработка данных измерений может быть интерпретирована как один из этапов процесса регуляризации. Степень точности, с которой поле может быть восстановлено с помощью  $S$ -аппроксимаций, определяется количеством точек наблюдения, их взаимным расположением, рельефом исследуемой территории и прочими факторами.

#### 4. Особенности моделирования магнитного поля Марса

Данные, собранные на различных высотах и в разные периоды времени с помощью разных космических аппаратов, имеют различное разрешение и точность. Неравномерная плотность данных измерений над различными областями создает трудности при построении моделей.

Измерения магнитного поля Марса на спутниковых высотах подвержены воздействию внешних факторов, таких как межпланетное магнитное поле, солнечный ветер, выбросы корональной массы и собственная магнитосфера планеты. Для минимизации искажений, вызванных этими факторами, требуются специальные методы фильтрации и обработки данных.

Определение источников магнитного поля по измерениям на орбите представляет собой обратную задачу с множеством возможных решений. Для выбора среди многозначных решений наиболее вероятной модели применяются методы регуляризации и оптимизации, которые, однако, могут накладывать ограничения и предположения на итоговый результат, в том числе ограничивают возможности трансформации полей.

Построение высокодетализированных моделей требует значительных вычислительных ресурсов.

Топографические особенности Марса также вносят свой вклад в формирование магнитного поля и должны учитываться при моделировании.

#### 5. Выборка данных

В настоящей работе сосредоточено внимание на данных миссии MAVEN. Были использованы калиброванные данные `insitu.calibrated` уровня 2 [23]. Эти данные представлены в физических единицах и усреднены с равномерной частотой. До высоты 500 км данные записаны с частотой одно измерение в 4 с, выше – одно измерение в 8 с. Помимо измерений магнитного поля, времени и положения космического аппарата, в наборе данных `In situ` представлены ключевые параметры и информация об эфемеридах, полученные как в результате самих измерений приборов космического аппарата, так и применения библиотек SPICE, одному измерению соответствует 235 признаков (колонок). Были взяты данные начиная с 18 октября 2014 г., чтобы исключить пропущенные значения измерений. Количество измерений (строк) до 15 мая 2024 г. включительно составило 38 140 693.

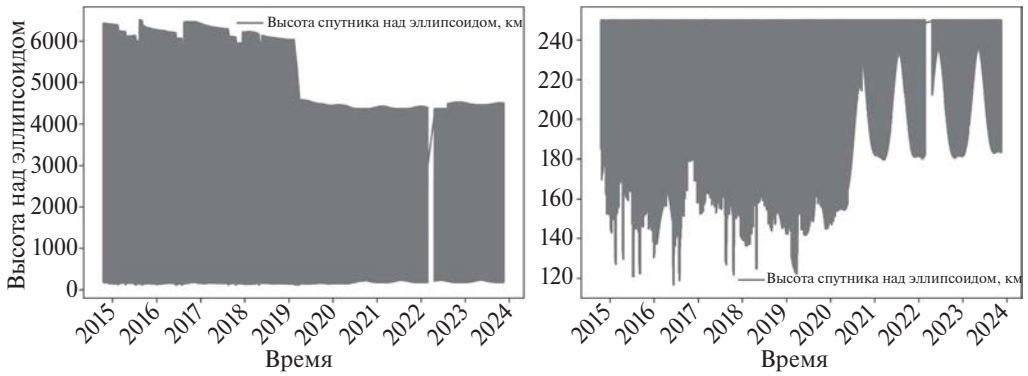


Рис. 2. Высотные профили измерений, полученных аппаратом MAVEN в период с 2014 по 2024 гг. Справа представлен фрагмент данных, ограниченных высотой 250 км.

Космический аппарат MAVEN движется по эллиптической орбите, его высота над поверхностью Марса варьируется в диапазоне от 116 км до 6500 км (см. рис. 2). До 2021 г. удалось собрать данные на более низких орбитах, в среднем менее 150 км. Измерения доступны в диапазоне от  $75^\circ$  южной широты до  $75^\circ$  северной широты.

Наблюдаемые значения магнитного поля представляют собой суперпозицию внешнего магнитного поля и постоянного магнитного поля коры. В [12] предложен подход, основанный на анализе данных, полученных на высотах до 600 км. Учитывая, что частота измерений в наборе данных постоянна до высоты 500 км, и принимая во внимание интерес к изучению магнитного поля в непосредственной близости от планеты, авторы ограничили выборку данных высотой 500 км. Рисунок 3 иллюстрирует зависимость измеренных значений компонент магнитного поля  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  от высоты над поверхностью Марса. Наблюдается общая тенденция к уменьшению величины магнитного поля с увеличением высоты. Однако также наблюдается присутствие внешнего магнитного поля, а именно межпланетного магнитного поля, связанного с солнечным ветром. Это внешнее влияние проявляется в виде отклонений от монотонного убывания магнитного поля. Данное наблюдение подчеркивает сложность магнитной среды вблизи Марса и необходимость учета различных источников при интерпретации измерений магнитного поля (см. [24–26]).

Производились выборки данных как на прямоугольной сетке с шагом  $0,5^\circ$ , так и на равновеликой сетке SREAG [27]. В дальнейших примерах представлены результаты для выборки на прямоугольной сетке.

Для построения аналитической аппроксимации и аналитического продолжения поля была выбрана следующая область: от  $25^\circ$  ю.ш. до  $35^\circ$  с.ш., от  $100^\circ$  в.д. до  $160^\circ$  в.д. Данная область включает в себя место посадки космического аппарата миссии InSight в районе равнины Элизий,  $4,502^\circ$  с.ш.,  $135,623^\circ$  в.д. ([28]), а также место посадки ровера Чжужун на равнине Утопия,  $25,066^\circ$  с.ш.  $109,926^\circ$  в.д. [29].

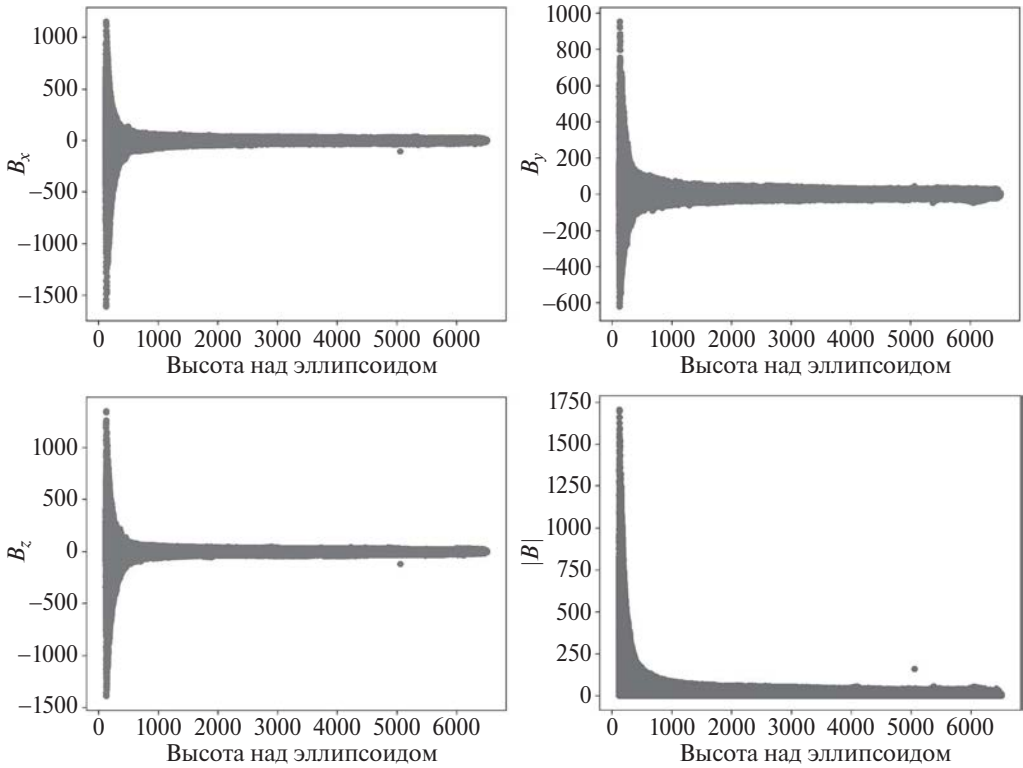


Рис. 3. Высотный профиль компонент магнитного поля. Точечный график иллюстрирует убывание значений компонент магнитного поля  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  и интенсивности  $|B|$  с увеличением высоты.

Минимальная высота, на которой проводились измерения над исследуемым регионом, составляет 119,4 км. Ограничение выборки исключительно ночными данными оказывает существенное влияние на общую картину и значительно сокращает диапазон наблюдаемых значений. В частности, минимальная высота измерений в некоторых точках превышает 450 км.

Каждое измерение сопоставлялось с узлом прямоугольной сетки, если отклонение его широты и долготы от соответствующих координат узла не превышало  $0,25^\circ$ . При этом для построения аппроксимации использовались исходные координаты измерений. В данной работе анализировались выборки данных измерений магнитного поля, полученных на минимальных высотах над узлами заданной сетки.

Как видно на рис. 4, на котором представлен пример измерений компоненты  $B_z$ , ночные данные демонстрируют значительно меньший уровень шума по сравнению с дневными, поскольку они менее подвержены влиянию внешних магнитных возмущений, что обеспечивает более высокое соотношение сигнал/шум. Это делает ночные данные предпочтительными для моделирования литосферного магнитного поля, так как они предоставляют более точные и надежные результаты.

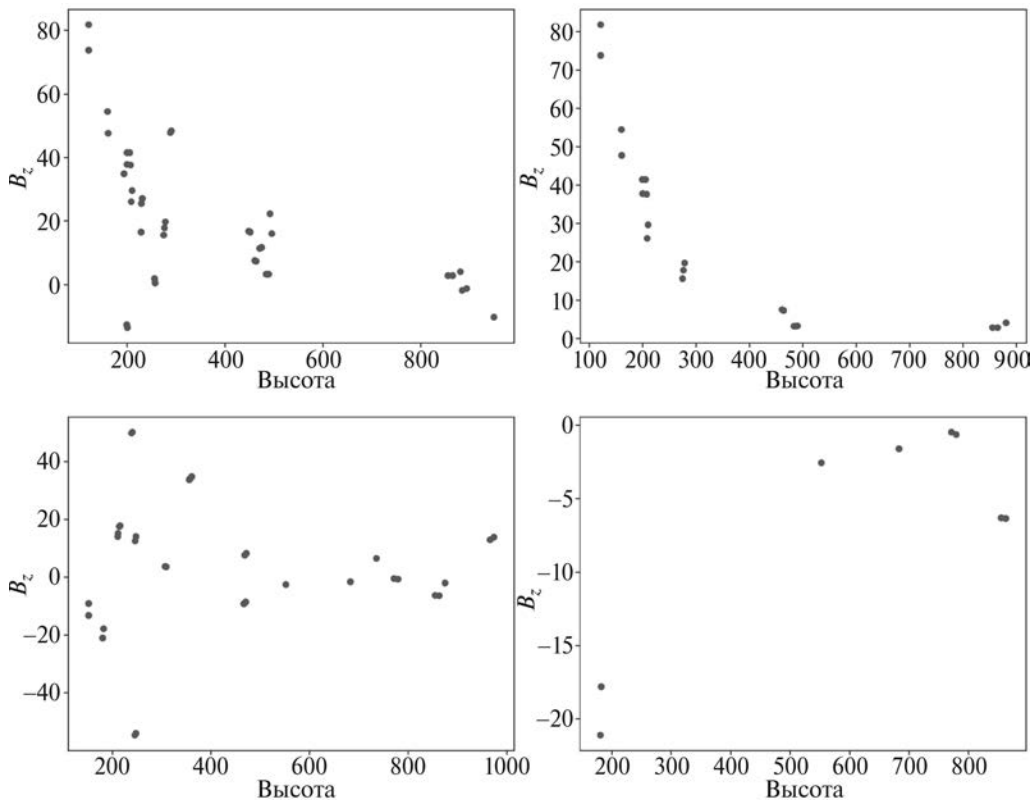


Рис. 4. Сверху – измерения вертикальной компоненты магнитного поля ( $B_z$ ) над точкой с координатами  $0^\circ$  с.ш.,  $0^\circ$  в.д. ( $+0,5^\circ$ ) до высоты 1000 км. Снизу – аналогичные измерения, выполненные над местом посадки миссии InSight. Слева – ночные и дневные измерения, справа – только ночные.

Дневные данные, напротив, могут быть существенно искажены под воздействием солнечной активности, такой как солнечные вспышки. Дополнительный вклад вносят токи, генерируемые в ионосфере Марса под воздействием солнечного излучения. Ограничение выборки ночными данными минимизирует влияние этих факторов.

Следуя рекомендациям, данным в [12], определяем ночные данные как измерения, полученные в период с 19:00 до 5:00 по местному времени космического аппарата. В работе [15], посвященной анализу магнитного поля в месте посадки миссии InSight, авторы используют более узкий временной интервал – с 20:00 до 4:00 – для еще более строгой минимизации вклада внешних полей. Однако использование более узкого временного окна существенно сокращает объем доступных данных, что негативно влияет на статистическую значимость и репрезентативность выборки. В целом, строгая временная селекция может привести к исключению важных измерений на низких высотах, важных для более точного моделирования литосферного магнитного поля.

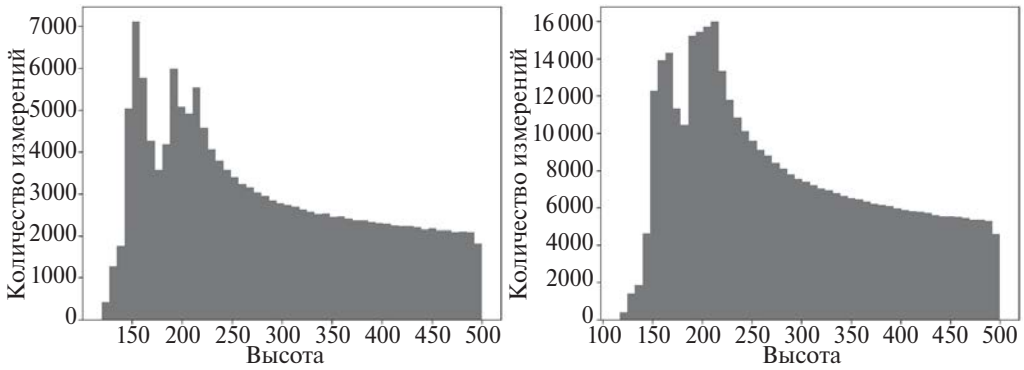


Рис. 5. Частотное распределение высот наблюдений над выбранной исследуемой областью. Слева – для ночных данных, справа – все данные.

В работе приоритет отдается данным, собранным на малых высотах, поскольку они играют ключевую роль в создании высокоразрешающих и точных моделей магнитного поля литосферы Марса. Измерения на низких высотах производятся ближе к источникам магнитного поля, что позволяет более детально выявить и охарактеризовать мелкомасштабные магнитные аномалии и структурные особенности поля.

При формировании выборки с использованием как ночных, так и дневных данных для каждого узла сетки было обнаружено как минимум одно измерение на высоте до 500 км. При ограничении выборки только ночными данными, доля узлов без привязанных значений составила 0,2% (31 из 14 641) для выбранной области.

Из гистограммы на рис. 5 видно, что вследствие эллиптической орбиты космического аппарата MAVEN наибольшая частота измерений в исследуемой области сконцентрирована на высотах, близких к поверхности планеты. Отчетливо выделяются два характерных пика распределения – около 150 и 190 км.

При решении обратной задачи с использованием алгоритма S-аппроксимаций оптимальным является выбор данных измерений, полученных на наиболее близких высотах. С учетом этого требования были сформированы три различные выборки данных: на минимальных зарегистрированных высотах; на высотах, наиболее близких к моде распределения высот над узлами сетки (~150 км); на высотах, соответствующих второму пику частоты измерений, наблюдаемому на гистограмме распределения (~190 км). Рисунок 6 иллюстрирует пространственное распределение высот для каждой из этих выборок. Сверху – распределение минимальных высот, посередине – распределение высот, ближайших к моде распределения 150 км, снизу – распределение высот, ближайших ко второму пику частоты измерений 190 км. Слева – с использованием как ночных, так и дневных данных, справа – с использованием только ночных данных. Данное представление позволяет оценить верти-

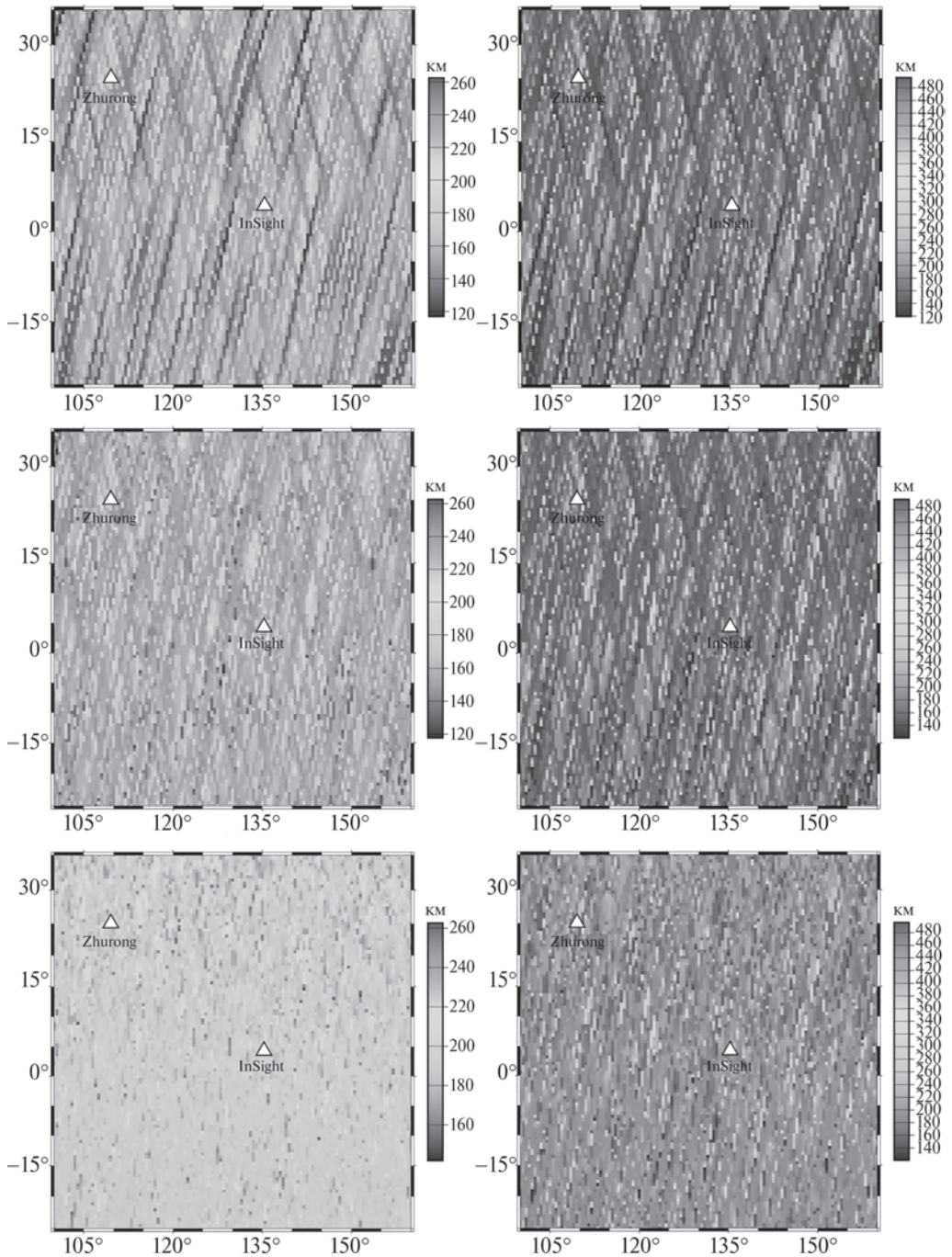


Рис. 6. Карты высот измерений для различных выборок данных.

кальную структуру измерений и ее вариации в зависимости от выбранного критерия селекции данных. Рисунок 7 демонстрирует значения измеренной напряженности магнитного поля на высотах, соответствующих выборкам,

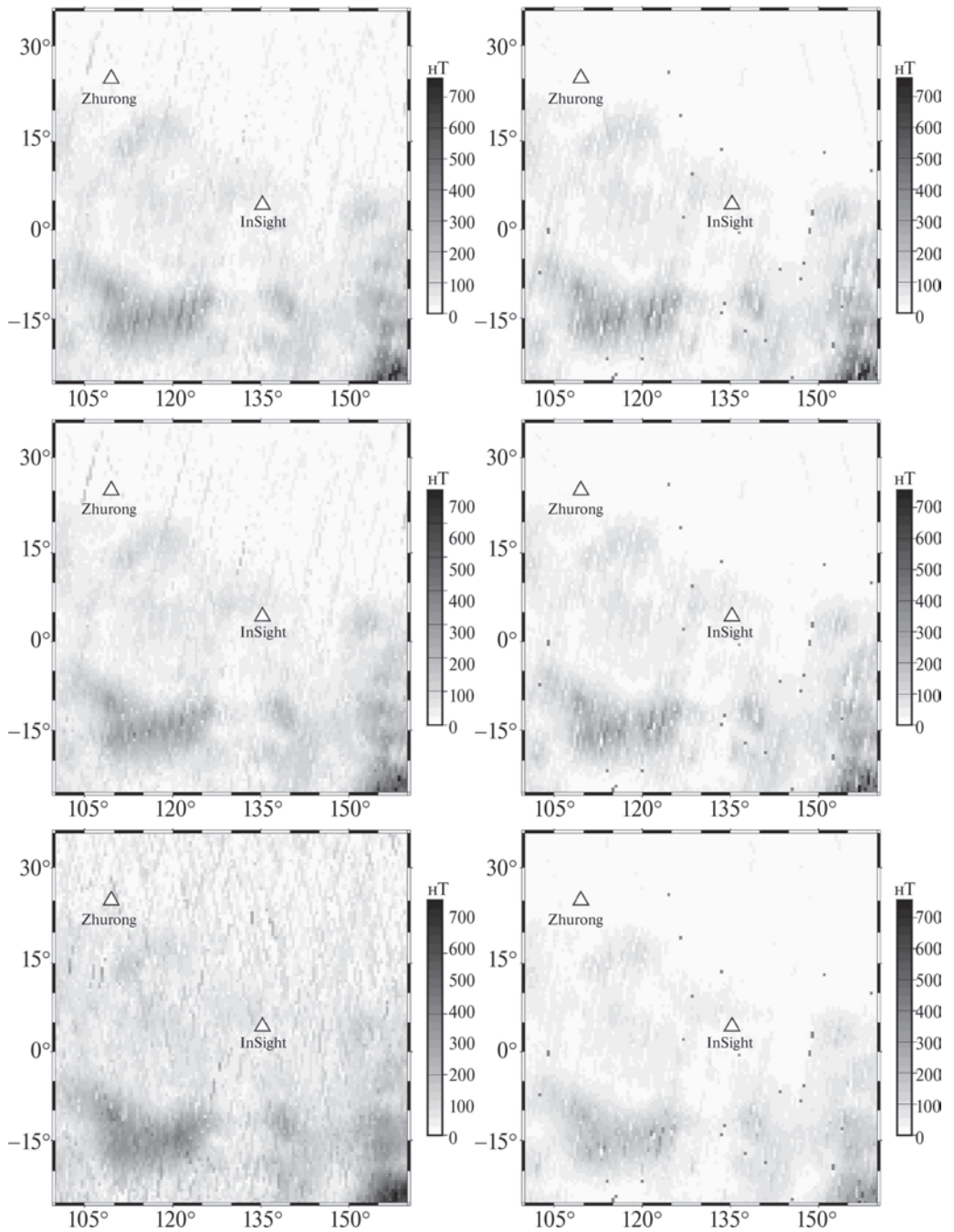


Рис. 7. Интенсивность магнитного поля в зависимости от выбранного критерия высоты измерений.

представленным на рис. 6, с учетом различных критериев отбора по высоте. Это позволяет визуализировать пространственные вариации магнитного поля и оценить влияние высоты измерений на регистрируемые значения. Такой

подход к формированию выборок обеспечивает возможность сравнительного анализа магнитного поля на различных высотных уровнях, что важно для корректной интерпретации данных.

## 6. Результаты аппроксимации

Ключевыми параметрами, определяющими модель аномального магнитного поля, полученную методом S-аппроксимаций, являлись радиусы аномалии. Эксперименты проводились с варьированием глубины расположения сфер под поверхностью идеализированной сферической планеты радиусом 3393,5 км в диапазоне от 0,1 км до 50,0 км. Результаты проведенных экспериментов свидетельствуют о высокой точности аппроксимации аномального магнитного поля методом S-аппроксимаций. В таблице приведены данные результатов аппроксимации для различных выборок, полученных при залегании источников магнитного поля на глубинах 20 и 40 км. В экспериментах с аббревиатурой «DN» использовались как ночные, так и дневные данные, «N» – только ночные данные. Везде индекс качества решения равен

$$\Delta = \frac{\|A\lambda - f_\delta\|}{\|f_\delta\|} < 10^{-8},$$

среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_0 = RMSE = \frac{\|A\lambda - f_\delta\|}{\sqrt{N}} < 10^{-8},$$

$$\sigma_{\min} = \min |A\lambda - f_\delta|,$$

$$\sigma_{\max} = \max |A\lambda - f_\delta|.$$

Здесь  $\|f_\delta\|$  – евклидова норма,  $N$  – количество точек,  $\sigma_{\min}$  – минимальное абсолютное значение ошибки,  $\sigma_{\max}$  – максимальное абсолютное значение ошибки. Среднеквадратические отклонения данных от аналитической аппроксимации для представленных в таблице выборок приведены на рис. 8. Сверху – для минимальных высот измерений, посередине – для высот, наиболее близких к моде распределения высот над узлами сетки (150 км), снизу – наиболее близких к 190 км. Слева – используются и ночные, и дневные данные, справа – только ночные.

Результат аппроксимации для различных выборок данных

Эксперимент	Число точек $N$	$\sigma_0$	$\sigma_{\min}$	$\sigma_{\max}$	$\Delta$
DN-min	14641	8,371e-09	1,662e-12	3,211e-08	1,858e-10
DN-150	14641	8,283e-09	6,341e-13	3,489e-08	1,935e-10
DN-190	14641	8,519e-09	1,570e-12	3,480e-08	2,484e-10
N-min	14610	3,902e-09	4,423e-13	1,756e-08	9,839e-11
N-150	14610	4,259e-09	1,065e-13	1,730e-08	1,117e-10
N-190	14610	3,149e-09	1,900e-13	1,423e-08	1,067e-10

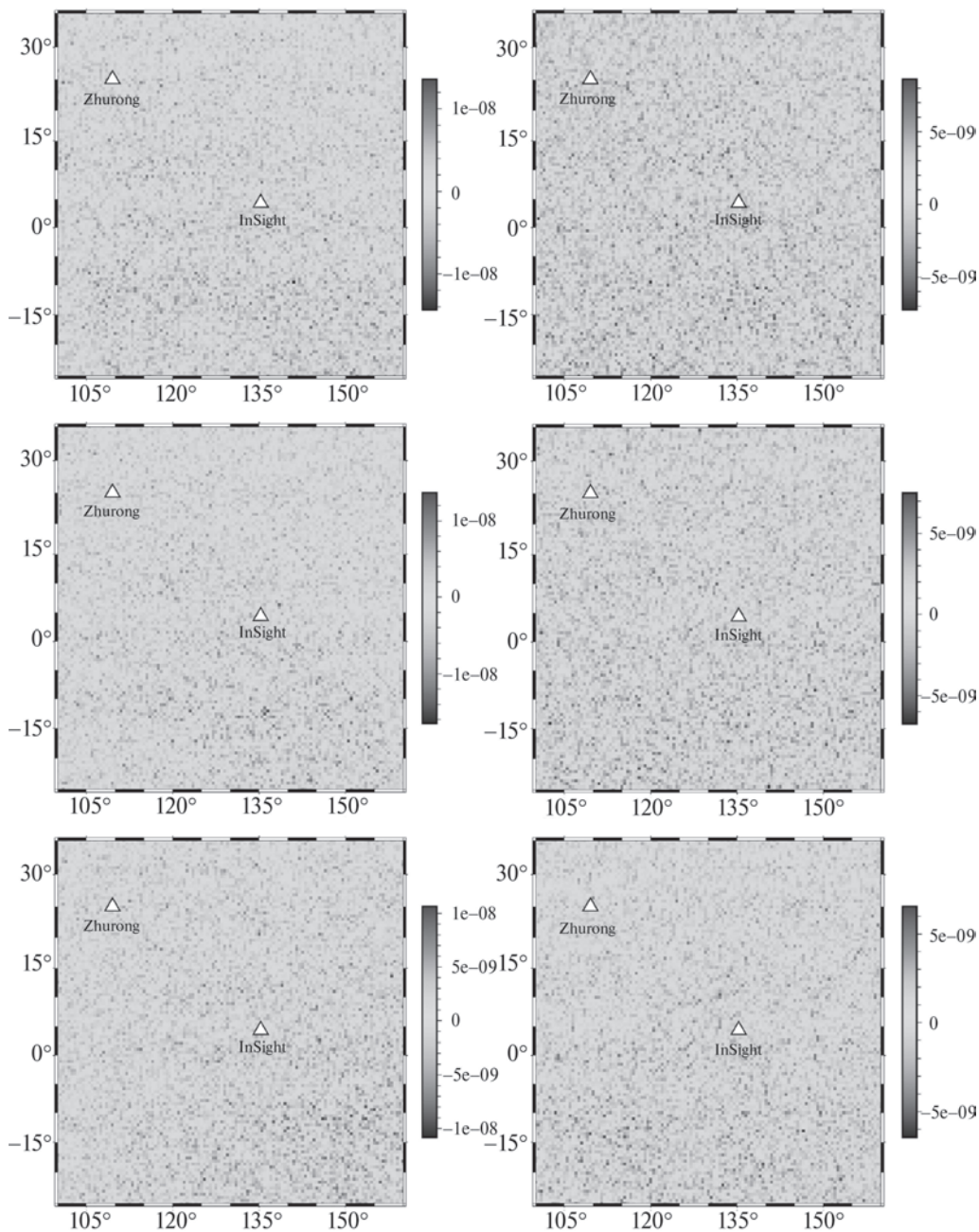


Рис. 8. Среднеквадратические отклонения данных от аналитической аппроксимации для представленных в таблице выборок.

Приведение магнитного поля к единой высоте методом S-аппроксимаций представляет собой сложную, но важную задачу. В данной работе осуществлялось аналитическое продолжение компонент измеренного магнитного поля

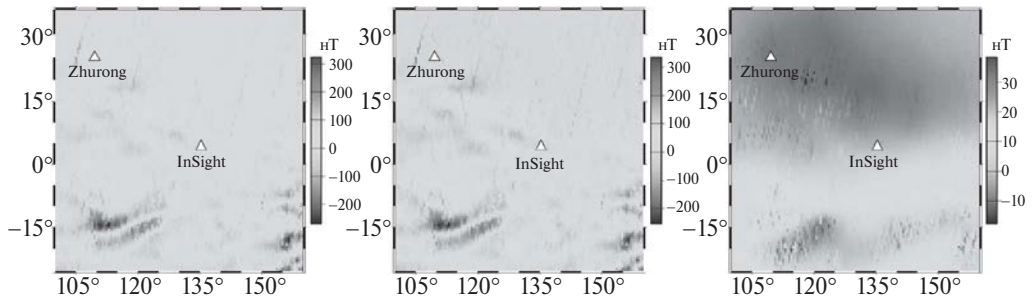


Рис. 9. Сравнение исходных данных и результата аналитического продолжения.

на высотах, близких к моде распределения 150 км, до единой высоты 150 км. Результаты поточечного аналитического продолжения поля на единую высоту 150 км представлены на рис. 9, где также приведено сравнение с моделью, предложенной в [12]. Слева – исходные измерения  $B_r$  на высотах, наиболее близких к 150 км, в центре – аналитическое продолжение поля  $B_r$  на единую высоту 150 км с помощью регионального метода S-аппроксимаций, справа – разница между исходными данными и результатом продолжения.

## 7. Заключение

В настоящей работе была проведена детальная обработка и анализ данных измерений магнитного поля Марса, полученных космическим аппаратом MAVEN. Были сформированы различные выборки данных, включая ночные и дневные измерения, на различных высотах. Проведенное исследование демонстрирует важность тщательного подхода к выбору и предварительной обработке данных спутниковых измерений при моделировании магнитного поля планеты. Ограничение выборки ночными данными значительно улучшает соотношение сигнал/шум, что особенно важно для исследования слабых магнитных аномалий. Однако это приводит к уменьшению общего количества доступных данных, что может быть ограничивающим фактором при построении глобальных моделей магнитного поля. Полученные результаты подчеркивают важность тщательного подхода к формированию выборок данных при построении глобальных моделей магнитного поля планеты. Учет особенностей орбиты космического аппарата, временных вариаций магнитного поля и характерных высот измерений позволяет повысить качество и достоверность получаемых моделей.

Полученные результаты демонстрируют, что метод S-аппроксимаций является эффективным инструментом для моделирования магнитного поля Марса. Среднеквадратические отклонения модели от измерений составляют менее  $10^{-8}$  нТл, что свидетельствует о высокой точности аппроксимации аномального магнитного поля при различных параметрах модели и критериях выборки данных. Аналитическое продолжение магнитного поля на единую

высоту позволяет получить согласованную региональную модель поля, сопоставимую с существующими глобальными моделями. Важным аспектом является выбранная глубина залегания источников магнитного поля. В данной работе были рассмотрены глубины 20 и 40 км, что соответствует предположениям о расположении магнитных аномалий в литосфере Марса. Результаты вычислений также показали, что метод S-аппроксимаций позволяет адекватно моделировать поле при различных глубинах источников.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на разработку оптимальных стратегий комбинирования данных из различных выборок, расширение области моделирования и создание детальной глобальной модели магнитного поля Марса, а также на интеграцию данных измерений миссий MGS и MAVEN для повышения пространственного и временного охвата измерений. Отдельно необходимо проводить сопоставление аналитических продолжений магнитного поля, полученных методом S-аппроксимаций, на поверхность планеты с результатами наземных измерений и данными о геологическом строении планеты. Комбинирование выборок данных, полученных по различным критериям, может обеспечить более полное представление о структуре и вариациях магнитного поля на различных масштабах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Acuña M.H.* Space-based magnetometers // *Rev. Scientific Instrum.* 2002. V. 73. No. 11. P. 3717–3736.
2. *Breus T.K., Verigin M.I., Kotova G.A., et al.* Characteristics of the Martian Magnetosphere according to the Data of the Mars 3 and Phobos 2 Satellites: Comparison with MGS and MAVEN Results // *Cosmic Res.* 2021. V. 59. No. 6. P. 478–492.
3. *Langlais B., Purucker M.E., Mandea M.* Crustal magnetic field of Mars // *J. Geophys. Res.* 2004. V. 109. No. E02008.
4. *Acuña M.H.* The magnetic field of Mars // *Leading Edge.* 2003. V. 22. No. 8. P. 769–771.
5. *Arkani-Hamed J.* Magnetization of Martian lower crust: Revisited // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. No. E5. 2006JE002824.
6. *Cain J.C., Ferguson B.B., Mozzoni D.* An  $n = 90$  internal potential function of the Martian crustal magnetic field // *J. Geophys. Res.* 2003. V. 108. No. E2. 5008.
7. *Chiao L., Lin J., Gung Y.* Crustal magnetization equivalent source model of Mars constructed from a hierarchical multiresolution inversion of the Mars Global Surveyor data // *J. Geophys. Res.* 2006. V. 111. No. E12010.
8. *Lillis R.J., Frey H.V., Manga M.* Rapid decrease in Martian crustal magnetization in the Noachian era: Implications for the dynamo and climate of early Mars // *Geop. Res. Lett.* John Wiley & Sons, Ltd, 2008. V. 35. No. L14203.
9. *Morschhauser A., Lesur V., Grott M.* A spherical harmonic model of the lithospheric magnetic field of Mars // *J. Geophys. Res.: Planets.* John Wiley & Sons, Ltd, 2014. V. 119. No. 6. P. 1162–1188.
10. *Purucker M., Ravat D., Frey H., et al.* An altitude-normalized magnetic map of Mars and its interpretation // *Geop. Res. Lett.* 2000. V. 27. No. 16. P. 2449–2452.

11. *Whaler K.A., Purucker M.E.* A spatially continuous magnetization model for Mars // *J. Geophys. Res.: Planets.* John Wiley & Sons, Ltd, 2005. V. 110. No. E9.
12. *Langlais B., Thébault E., Houliez A., et al.* A New Model of the Crustal Magnetic Field of Mars Using MGS and MAVEN // *JGR Planets.* 2019. V. 124. No. 6. P. 1542–1569.
13. *Mittelholz A., Johnson C.L., Morschhauser A.A.* A New Magnetic Field Activity Proxy for Mars From MAVEN Data // *Geop. Res. Lett.* 2018. V. 45. No. 12. P. 5899–5907.
14. *Gao J.W., Rong Z.J., Klinger L., et al.* A Spherical Harmonic Martian Crustal Magnetic Field Model Combining Data Sets of MAVEN and MGS // *Earth Space Science.* 2021. V. 8. No. 10. e2021EA001860.
15. *Johnson C.L., Mittelholz A., Langlais B., et al.* Crustal and time-varying magnetic fields at the InSight landing site on Mars // *Nature Geoscience.* 2020. V. 13. No. 3. P. 199–204.
16. *Du A., Ge Y., Wang H. et al.* Ground magnetic survey on Mars from the Zhurong rover // *Nature Astronomy.* 2023. V. 7. No. 9. P. 1037–1047.
17. *Langlais B., Lesur V., Purucker M.E., et al.* Crustal Magnetic Fields of Terrestrial Planets // *Space Sci Rev.* 2010. V. 152. No. 1-4. P. 223–249.
18. *Delcourt T., Mittelholz A.* A new model of the lithospheric magnetic field of Mars using a physics-informed neural network // *Tenth International Conference on Mars 2024 (LPI Contrib. No. 3007).*
19. *Strakhov V.N., Stepanova I.E.* Solution of gravity problems by the S-approximation method (regional version) // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth.* 2002. V. 38. No. 7. P. 535–544.
20. *Stepanova I.E.* On the S-approximation of the Earth’s gravity field: regional version // *Inverse Problems in Science and Engineering.* 2009. V. 17. No. 8. P. 1095–1111.
21. *Stepanova I.E., Salnikov A.M., Gudkova T.V., et al.* On finding the analytical continuation of the magnetic field of Mars from satellite data using a combined approach // *Geop. Res.* 2023. V. 24. No. 2. P. 58–83.
22. *Carlson B.C.* Computing elliptic integrals by duplication // *Numer. Math.* 1979. V. 33. No. 1. P. 1–16.
23. The Planetary Plasma Interactions (PPI) Node of the Planetary Data System (PDS) <https://search-pdspi.igpp.ucla.edu>.
24. *Langlais B., Civet F., Thebault E.* In situ and remote characterization of the external field temporal variations at Mars // *J. Geophys. Res.: Planets.* John Wiley & Sons, Ltd, 2017. V. 122. No. 1. P. 110–123.
25. *Mittelholz A., Johnson C.L., Lillis R.J.* Global-scale external magnetic fields at Mars measured at satellite altitude // *J. Geophys. Res.: Planets.* 2017. V. 122. No. 6. P. 1243–1257.
26. *Mittelholz A., Johnson C.L., Fillingim M., et al.* Mars’ External Magnetic Field as Seen From the Surface With InSight // *J. Geophys. Res.: Planets.* John Wiley & Sons, Ltd, 2023. V. 128. No. 1. e2022JE007616.
27. *Malkin Z.* A New Equal-area Isolatitudinal Grid on a Spherical Surface // *AJ.* 2019. V. 158. No. 4. P. 158.

28. Du A., Ge Y., Wang H., et al. 1. Golombek M., Kass D., Williams N., et al. Assessment of InSight Landing Site Predictions // J. Geophys. Res.: Planets. John Wiley & Sons, Ltd, 2020. V. 125. No. 8. e2020JE006502.
29. “Tianwen-1 Lander and Zhurong Rover in Southern Utopia Planitia (ESP\_069665\_2055)”. [https://hirise.lpl.arizona.edu/ESP\\_069665\\_2055](https://hirise.lpl.arizona.edu/ESP_069665_2055).

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галляевым.*

Поступила в редакцию 05.06.2024

После доработки 22.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024

© 2024 г. **И.Д. ЛАРЮШИН**, канд. физ.-мат. наук (ilaryushin@mail.ru)  
(Институт прикладной физики РАН им. А.В. Гапонова-Грехова,  
Нижний Новгород),  
**Я.А. КОЛТОЧЕНКО**, (i-kolt@yandex.ru)  
(Московский физико-технический институт (НИУ))

## РАСШИРЕННАЯ МОДЕЛЬ ЛАНЧЕСТЕРА–ОСИПОВА ДЛЯ УЧЕТА БОЕВЫХ ЕДИНИЦ С ОДНОКРАТНЫМ ДЕЙСТВИЕМ В СТРАТЕГИЧЕСКИХ КОМПЬЮТЕРНЫХ ИГРАХ

Построена модель, описывающая противостояние двух армий, каждая из которых одновременно содержит боевые единицы двух типов: с непрерывным и дискретным огнем. Исследована структура оптимальной композиции армии, составленной как ответ на известную композицию армии противника. Для проверки теории проведены симуляции сражений в простой стратегической игре – автобаттлере.

*Ключевые слова:* исследование операций, стратегические игры, модели Ланчестера–Осипова.

**DOI:** 10.31857/S0005231024100103, **EDN:** YUMVSN

### 1. Введение

Модели Ланчестера – Осипова, предназначенные для описания динамики военных противостояний, возникли более века назад [1, 2]. В изначально предложенном варианте они опираются на системы дифференциальных уравнений, описывающих истощение ресурсов противоборствующих сторон. Конкретный вид уравнений определяется из условий, в которых происходит сражение.

В некоторых случаях оказывается, что рассматриваемую систему удобнее описывать дискретными моделями, например это характерно для морских сражений [3–5].

В данной работе рассмотрен синтетический дискретно-непрерывный случай, типичный для современных стратегических компьютерных игр (Real-Time Strategy/RTS) [6–8], в которых перед игроками часто возникает необходимость составлять армии, содержащие одновременно боевые единицы с квазинепрерывным огнем (такие как пехота, боевые машины пехоты, танки и т.д., потенциально способные осуществить множество выстрелов в течение одного сражения) и с однократным (например дроны-камикадзе, сюда же можно отнести и многие виды артиллерии, действие которых в течение сражения существенно ограничено или вообще однократно). Создание искусственного интеллекта для игр такого рода является одной из наиболее актуальных и сложных задач машинного обучения на сегодняшний день [8, 9].

В постановке конкретной задачи, а также в экспериментальной части будем отталкиваться от механики автобаттлеров [10, 11] – разновидности клеточных стратегических игр, в которых сражения происходят автоматически и игровой процесс акцентирован на составлении оптимального набора боевых единиц и их пространственного расположения. Тем не менее аналогичные подходы в перспективе могут быть применены и для анализа сражений в других произвольных поджанрах стратегических игр.

## 2. Модель

В современных стратегических играх каждая боевая единица (юнит), как правило имеет следующие базовые характеристики:

- Запас здоровья. Успешные вражеские атаки уменьшают запас здоровья цели, и, когда запас полностью истощается, боевая единица погибает.

- Урон в секунду (УВС) – средний урон, отнимаемый у цели за одну успешную атаку, разделенный на время между двумя последовательными атаками.

- Радиус атаки – максимальное расстояние до цели, при котором боевая единица может атаковать.

- Специальные способности, например однократное нанесение существенного урона одиночному врагу или группе врагов внутри определенной области. Применение способности либо требует затрат специальных ресурсов (энергии данного юнита), либо имеет долгую задержку (cooldown/охлаждение) перед повторным применением.

Для описания сражений армий, состоящих из боевых единиц без специальных способностей, будем использовать недавно предложенную модель [6], которая опирается на динамику истощения суммарного здоровья двух армий вместо истощения их численностей. Данный подход позволяет, например, объяснить, за счет чего при управлении одинаковыми, даже гомогенными, армиями, более опытный игрок будет статистически одерживать победу над новичком. Для неоднородных армий данная модель, как подтверждено в эксперименте, демонстрирует существенное улучшение точности предсказания исхода битв, проходящих в режиме автоматического управления, по сравнению с классическими моделями Ланчестера–Осипова.

В данной же работе рассматривается расширение этой модели, необходимое при включении в состав армии боевых единиц с наиболее простой спецспособностью, имеющей однократное действие. В следующем разделе обозначены характеристики конкретных типов боевых единиц, рассматриваемых в данной статье.

### 2.1. Характеристики типов боевых единиц

Будем рассматривать минималистичный вариант автобаттлера, в котором есть только три типа боевых единиц: **мечники**, **лучники** и **маги**, стоимость производства каждой боевой единицы полагаем одинаковой (сами обозначения введены для удобства и по желанию могли бы быть заменены, например,

на танки, вертолеты, подводные лодки). В типичных автобаттлерах имеется множество различных подтипов боевых единиц в каждой из этих категорий, однако в данной работе будем стремиться не решить задачу в самом общем виде, а исследовать базовые свойства таких систем. Далее описаны характеристики каждого из типов боевых единиц:

– **Мечник** имеет 1 здоровья и УВС, т.е. здоровье и УВС нормированы на характеристики мечника.

– **Лучник** имеет  $h < 1$  здоровья и  $d > h^{-1}$  урона, таким образом в противостоянии 1 на 1 лучник уничтожает мечника. При этом в сложносоставленной армии мечники выступают “живым щитом” для лучников [6], т.е. условием для возможности нанесения урона по лучникам армии А является уничтожение всех мечников в армии А.

– **Маг** имеет возможность нанести  $b$  урона врагу перед началом сражения, при этом  $h < b < 1$ , т.е. маг 1 на 1 уничтожит лучника, но не мечника. Более никаких функций, помимо стартового нанесения урона, маг не выполняет, и против одного мечника один маг терпит поражение. Считаем, что маги могут перед сражением наносить урон по вражеским лучникам, а если лучников не осталось, то урон наносится по мечникам.

Таким образом, эти три боевые единицы выстраиваются в конфигурацию “камень–ножницы–бумага”. Этот случай интересен потому, что здесь достигается игровая сбалансированность, т.е. невозможность отдать заведомое предпочтение какому-либо из представленных типов юнитов при составлении армии.

В данной работе будем стремиться получить оптимальный ответ на заданную вражескую армию, т.е. оптимальную композицию юнитов с фиксированной суммарной стоимостью при известной композиции юнитов противника. Критерий оптимальности – максимизация ланчестерской силы армии, выживающей на исходе сражения. В следующем подразделе обсуждается ланчестерская сила армии, не содержащей магов.

## 2.2. Базовая модель

При отсутствии магов имеем стандартную систему, для описания которой подходит базовая модель [6]. Пусть есть  $s \geq 0$  мечников и  $a \geq 0$  лучников,  $s + a = 1$ . Сила их композиции определяется выражением

$$(1) \quad S = \int_0^{ah+s} dy \int_0^y \rho(x) dx,$$

здесь  $\rho$  – распределение плотности УВС, характеризующее убывание полного УВС армии при получении урона,  $ah + s$  – полное здоровье армии в начале битвы. В данной работе используем простейшую аппроксимацию, имеющую вид

$$(2) \quad \rho(x) = d/h + (1 - d/h)\theta(x - ah),$$

где  $\theta$  – функция Хевисайда. Подставляя (2) в (1), получаем выражение для силы композиции:

$$(3) \quad S = a^2 dh/2 + a(1-a)d + (1-a)^2/2.$$

Оптимальная композиция в этом случае не зависит от состава вражеской армии. Из  $dS/da = 0$  получаем

$$(4) \quad a^* = \frac{d-1}{d(2-h)-1}.$$

При  $dh > 1$  получаем  $a^* > 0,5$ , т.е. лучников нужно всегда больше, чем мечников (равенство достигается на кривой  $dh = 1$ ).

Максимальная сила при этом равна

$$(5) \quad S^* = \frac{d(d-h)}{2d(2-h)-2}.$$

Обсудим некоторые свойства выражения (5). При  $h = 1$  оптимальная армия согласно (4) состоит из одних лучников и имеет силу  $S^* = d/2$ . При  $h \ll 1$  максимальная сила  $S^* \approx d^2/(4d-2) \approx d/4$  (при этом по нашим условиям  $d > h^{-1} \gg 1$ ). При  $h = d^{-1} + \delta_h$ , где  $\delta_h \ll 1$ , получаем  $S^* \approx (d+1)/4 + d\delta_h/8$ .

Отметим также, что если имеется  $G$  золота, то оптимальная пропорция юнитов сохраняется, а сила армии по нему скейлится квадратично,  $S_G^* = G^2 S^*$ . Разобрав задачу балансирования армии при отсутствии магов, перейдем к общему случаю в следующем подразделе.

### 2.3. Общйй случай

Рассмотрим эффект вражеских магов на армии. Обозначим количества мечников, лучников и магов в нашей армии через  $s_1, a_1, m_1$ , а во вражеской армии через  $s_{-1}, a_{-1}, m_{-1}$ . Разность сил (гамильтониан системы) можно записать следующим образом:

$$(6) \quad H = S_1 - S_{-1} = \int_{\xi_1}^{a_1 h + s_1} dy \int_{\xi_1}^y \rho_1(x) dx - \int_{\xi_{-1}}^{a_{-1} h + s_{-1}} dy \int_{\xi_{-1}}^y \rho_{-1}(x) dx,$$

где  $\xi_i = \min(m_{-i} b, a_i h + s_i)$  – количество здоровья, отнимаемое у армии вражескими магами в начале битвы.

Сначала рассмотрим случай  $m_1 = 0, a_1 + s_1 = 1, m_{-1} \neq 0$ , т.е. когда нужно составить оптимальную композицию только из мечников и лучников при учете наличия вражеских магов. Легко увидеть, что в этом случае имеются две принципиальные стратегии: либо вообще не производить лучников, и в этом случае весь урон магов придется по мечникам, но и в сражении будут участвовать только мечники, либо производить лучников больше, чем сожгут вражеские маги.

При выборе производить только мечников итоговая сила армии имеет вид

$$(7) \quad S_{1s}^* = (1 - m_{-1}b)^2/2.$$

Здесь  $m_{-1}b$  имеет смысл количества золота, сжигаемого вражескими магами.

При выборе производить лучников вражеские маги нанесут больший денежный ущерб  $m_{-1}b/h$ , но в этом случае оставшиеся деньги можно потратить на составление оптимальной композиции с долей лучников (4) и силой

$$(8) \quad S_{1a}^* = S^*(1 - m_{-1}b/h)^2\theta(1 - m_{-1}b/h).$$

Оптимальная сила равна максимальной из этих двух:

$$(9) \quad S_1^* = \max(S_{1s}^*, S_{1a}^*).$$

При  $m_{-1} = 0$ , очевидно, следует производить лучников, а при  $m_{-1}b \geq h$  урон вражеских магов больше, чем здоровье лучников, произведенных на все деньги, поэтому производить их нет смысла. Эффективность стратегий сравнивается в точке

$$(10) \quad m_{-1}^* = \frac{h(\sqrt{2S^*} - 1)}{b(\sqrt{2S^*} - h)}.$$

Таким образом, минимальное количество магов врага, при котором становится выгоден отказ от производства лучников, обратно пропорционально урону магов, и сложным образом зависит от параметров лучников  $d, h$ , входящих в (5). Также отметим, что  $2S^* > 1 > b > h > 0$ , откуда следует  $1 > m_{-1}^* > 0$ .

Перейдем к случаю, когда  $m_1 \neq 0$ ,  $a_1 + s_1 + m_1 = 1$ . Обе стратегии – производство лучников и отказ от них – теперь нужно сбалансировать с производством собственных магов. При этом производимые маги влияют как на силу собственной армии (уменьшая количество денег, которое на нее можно потратить), так и на силу вражеской через нанесение по ней урона. Разность сил при этом можно для обоих случаев записать в виде

$$(11) \quad S_1 - S_{-1} = (G - m_1)^2 S_1^+ - (a_{-1} - m_1 b/h)^2 dh/2 - \\ - (a_{-1} - m_1 b/h) s_{-1} d - s_{-1}^2,$$

где  $G$  – количество денег, оставшееся после атаки вражеских магов (зависящее от выбранной стратегии),  $S_1^+ = 0,5$  при отказе от производства лучников,  $S_1^+ = S^*$  при выборе производства лучников. Выражение (11) корректно в области  $0 < m_1 < a_{-1}h/b$ . Из  $\partial H/\partial m_1 = 0$  получаем

$$(12) \quad m_1^+ = \frac{2GS_1^+h - db(a_{-1}h + s_{-1})}{2S_1^+h - db^2}.$$

Итоговое выражение для оптимального количества магов имеет вид

$$(13) \quad m_1^* = \min(m_1^+, a_{-1}h/b).$$

Для нахождения конечного ответа нужно подставить значения  $G$  и  $S_1^+$  для обеих стратегий в (12) и далее в (11), сравнить их и выбрать лучшую стратегию. Качественно ситуация аналогична разобранной ранее при отсутствии возможности производить магов, т.е. при малом количестве магов врага нужно производить лучников, при большом – отказываться, однако в общем случае выражение для точки переключения между стратегиями, аналогичное (10), получается довольно громоздким и здесь не будем его приводить. В следующем разделе содержатся результаты численных расчетов гамильтониана (6) при различных параметрах, а также экспериментов в игровом симуляторе.

### 3. Симуляции и обсуждение

На рис. 1,а изображена зависимость гамильтониана (6) от пропорции юнитов в армии 1 при фиксированном составе армии 2, состоящей из одинакового количества всех типов боевых единиц. В этом случае при данных параметрах (указаны в подписи к рисунку) доминирует стратегия отказа от производства лучников, а оптимальная доля магов составляет  $m_1 = a_2 h / b = 2/9$ . Также на рисунке видна наименее выгодная стратегия – производство лучников с суммарным здоровьем, равным урону вражеских магов, и отказ от производства собственных магов.

На рис. 1,б показана зависимость количества выживших в армии 1 при составлении оптимального ответа от состава вражеской армии 2. Как видно из рисунка, в этом случае для игрока, не имеющего информационного преимущества и возможности составить оптимальный ответ, есть возможность

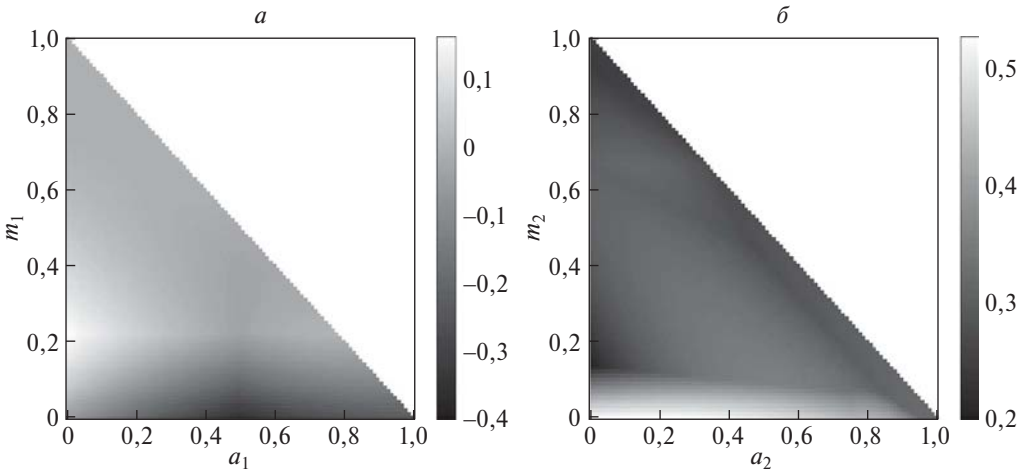


Рис. 1. а – Зависимость гамильтониана (6) от  $m_1$ ,  $a_1$  при  $m_2 = s_2 = a_2 = 1/3$  и  $s_1 = 1 - m_1 - a_1$ . Параметры боевых единиц  $d = 3$ ,  $h = 0,5$ ,  $b = 0,75$ . б – Зависимость выгоды информационного преимущества (отношения стоимости выжившей армии при оптимальном ответе к изначальной полной стоимости армии) от параметров армии противника  $m_2$ ,  $a_2$  при  $s_2 = 1 - a_2 - m_2$ .

минимизировать ущерб от информационного преимущества соперника, выбрав соответствующую стратегию, которая, по крайней мере, максимизирует количество нанесенного противнику ущерба. А в случае, если игрок с информационным преимуществом имеет при этом экономическое отставание, эта стратегия позволит минимизировать собственные потери экономически более сильного игрока.

В качестве дальнейшего развития этой тематики можно назвать оптимальную дезинформацию – сообщение противнику определенной информации с целью произведения им оптимального ответа, имеющего наиболее выгодный вид для дезинформирующей стороны. Напомним, что при отсутствии боевых единиц с однократным действием таких проблем (или с другой стороны – возможностей) вообще не было, так как оптимальная композиция (4) не зависела от состава вражеской армии и побеждал игрок, у которого больше денег. В данной же задаче информационный фактор становится мультипликатором, эффективно увеличивающим боевой потенциал на десятки процентов, см. на рис. 1,б разброс в диапазоне 20–50%. Таким образом, при сопоставимых экономических и технологических возможностях игроков информационный фактор становится критически значимым.

### *3.1. Симуляции в автобаттлере*

Непрерывные модели Ланчестера–Осипова по своей природе предназначены для описания крупномасштабных сражений. В данной работе проведены эксперименты для проверки применимости предлагаемой модели к описанию динамики сражений маленьких отрядов.

Для численного моделирования был создан минималистичный автобаттлер – среда, в которой сражение происходит на клеточном поле и каждая боевая единица (юнит) занимает ровно одну клетку. Сражение происходит следующим образом: для каждого юнита происходит поиск цели из вражеских юнитов в пределах дальности атаки. Из них выбирается тот, скорейшее уничтожение которого сильнее всего ослабит армию противника, т.е. с наибольшим отношением УВС к текущему здоровью. Как и в большинстве автобаттлеров, если у юнита уже есть цель, то он не меняет ее до уничтожения. После выбора целей происходит акт перестрелки, когда юниты наносят урон своим целям, и юниты, у которых закончилось здоровье, исчезают. После этого юниты, не атаковавшие в этом ходу из-за неимения целей внутри радиуса поражения, делают шаг в направлении центра армии противника.

Симуляция производилась на поле размером  $20 \times 10$ . Начальная расстановка боевых единиц в каждой реализации производилась случайным образом со следующими условиями: лучники синей команды могут появиться в первых трех столбцах, затем мечники синей команды появляются в следующих четырех столбцах, после этого идет нейтральная территория шириной 6 и ситуация зеркально повторяется. Пример начальной расстановки армий приведен на рис. 2.

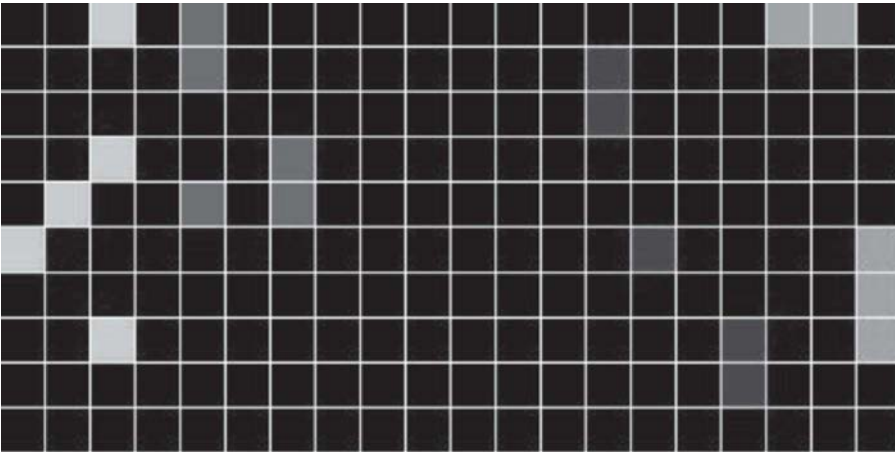


Рис. 2. Пример начальной расстановки двух армий в автобаттлере, обе из которых состоят из пяти мечников и пяти лучников. Более темными оттенками серого обозначены мечники, светлыми – лучники. Поле имеет размер  $20 \times 10$ .

По стандартной механике автобаттлеров восемь игроков находятся за столом и проводят сражения друг с другом по очереди. При каждом поражении проигравшему начисляется количество штрафных очков, равное количеству выживших боевых единиц врага. Когда игрок набирает критическое число штрафных очков, он выбывает из игры. Игра заканчивается, когда остается один игрок. Здесь не занимаемся рассмотрением экономической составляющей автобаттлера, но в качестве целевой функции рассматриваем количество выживших в результате сражения.

Симуляции проводились для трех составов армий игрока 2:

- 1) 5 мечников, 5 лучников, 0 магов;
- 2) 4 мечника, 3 лучника, 3 мага;
- 3) 1 мечник, 2 лучника, 7 магов.

Для армий игрока 1 перебирались все возможные сочетания юнитов при фиксированной сумме 10. Для каждого состава был проведен 21 эксперимент с различными случайными начальными расстановками обеих армий и результаты усреднены (при победе синего игрока выжившие юниты считались отрицательными числами, а при победе красного – положительными).

На рис. 3 результаты численных экспериментов ( $b$ ,  $z$ ,  $e$ ) сопоставлены с соответствующими гамильтонианами ( $a$ ,  $v$ ,  $d$ ) в одинаковых цветовых схемах. Во всех трех рассмотренных случаях оптимальная композиция, предсказываемая нашим гамильтонианом, совпадает с таковой в игре. Также сходство картин распределения в целом видно невооруженным глазом. Таким образом, даже в существенно дискретной системе предлагаемая модель, не учитывающая никак пространственное расположение и скорость движения боевых единиц, все же дает хорошие предсказания статистики сражений и оптимальных

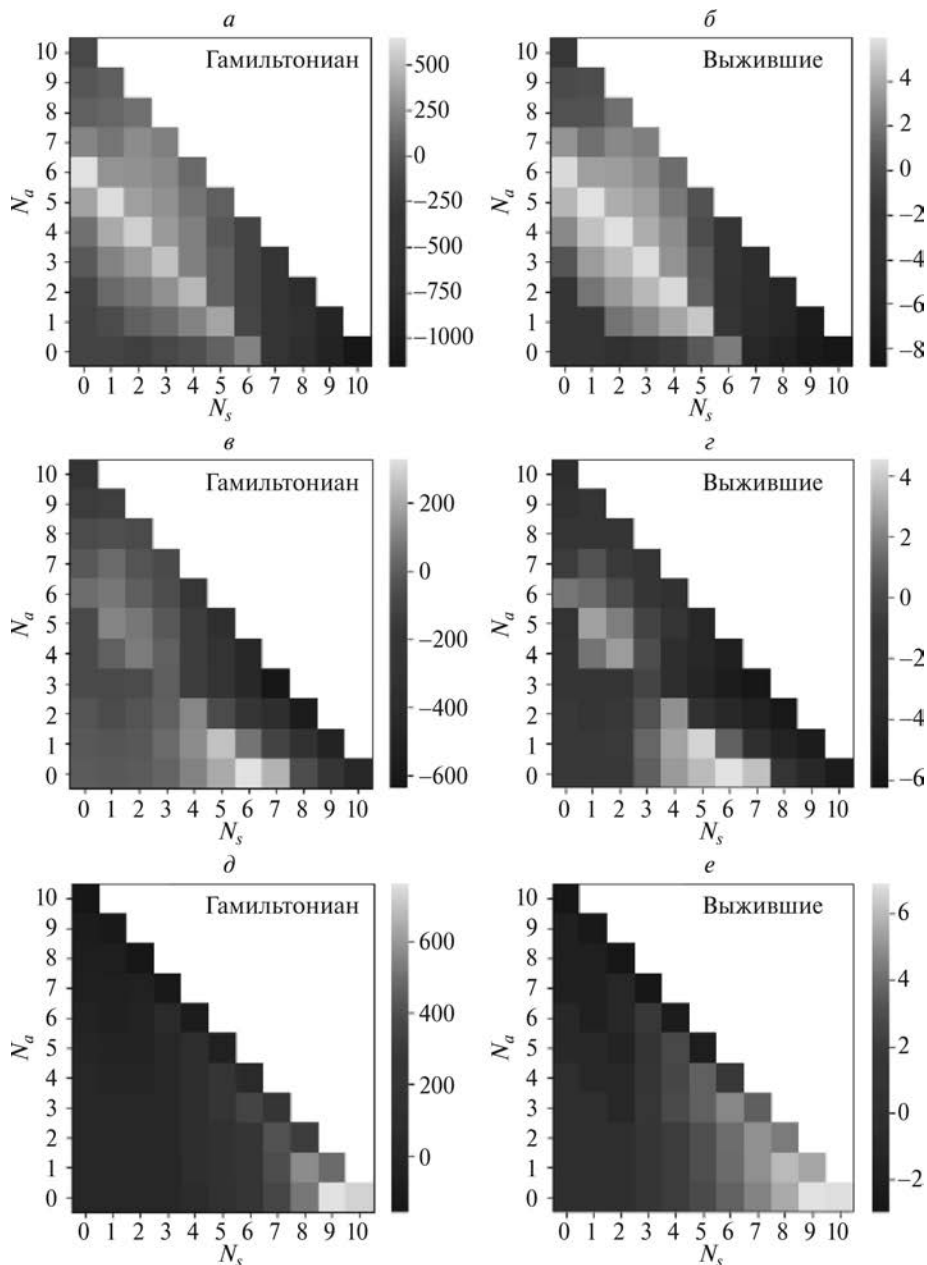


Рис. 3. Зависимости (*a*, *в*, *д*) гамильтониана системы (*б*, *г*, *е*) результатов численных экспериментов по измерению среднего количества выживших от состава армии 1. Армия игрока 2 состоит из: (*a*, *б*) 5 мечников, 5 лучников, 0 магов; (*в*, *г*) 4 мечника, 3 лучника, 3 мага; (*д*, *е*) 1 мечник, 2 лучника, 7 магов. По осям:  $N_s$  – количество мечников в армии 1,  $N_a$  – количество лучников, количество магов равно  $10 - N_s - N_a$ . Параметры мечников: 60 здоровья, 0,5 урона за ход, радиус атаки 3 клетки; у лучника 20 здоровья, 2 урона за ход, радиус атаки 4,5 клетки; начальный урон мага 25 единиц здоровья.

композиций в этом смысле. Проблема строгой оптимизации композиции армии в автобаттлере является NP-полной [12], однако здесь построено достаточно точное приближение, которое можно использовать при решении практических задач.

#### 4. Заключение

Предложена математическая модель, описывающая динамику сражения армий, содержащих одновременно боевые единицы с непрерывным огнем и спецспособностью однократного действия. Подробно разобран случай наличия выбора из трех типов боевых единиц, относящихся друг к другу как “камень-ножницы-бумага”, один из которых имеет однократный эффект, а два других обладают непрерывным огнем. Получены аналитические выражения для состава оптимального ответа на известную армию противника в этом случае. Показано, что разработанная дискретно-непрерывная модель хорошо применима не только к описанию крупномасштабных сражений, но и для сражений малых отрядов размером порядка десяти боевых единиц в автобаттлерах.

Проанализированы не только способы воспользоваться информационным преимуществом (через составление оптимального ответа на вражескую армию) но и способы защититься в условиях, когда игрок подозревает наличие такого преимущества у противника, а сам информацией о вражеской армии не обладает. Для последующих работ также большой интерес представляют подходы к оптимальной дезинформации противника, а именно сообщения ему такой ложной информации о своей армии, оптимальный ответ на которую был бы наиболее выгоден дезинформирующему игроку.

В данной работе рассмотрен симметричный случай (у двух игроков одинаковое количество денег и одинаковые характеристики боевых единиц), это типичная ситуация для компьютерных игр, однако на практике могут быть интересны и стратегии для случаев существенного преимущества, технологического и/или экономического, у одного из игроков. Рассмотренная механика действия боевых единиц с однократным эффектом также не является единственной возможной, и в перспективе могут проводиться исследования самых разнообразных других механик однократного действия.

Также перспективным представляется развитие подобных подходов для пространственных моделей сражений, аналогичных изложенным в [13, 14].

С точки зрения практической применимости обсуждавшиеся в данной работе стратегии и подходы могут быть полезны для изучения военными и политическими экспертами. Варгеймы с аналогичными механиками служат одним из важных аналитических инструментов в геополитике, многие ключевые центры, как, например, RAND и CSIS, имеют богатую историю производства таких игр и использования их для прогнозирования геополитических сценариев [15–17].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осинов М.П.* Влияние численности сражающихся сторон на их потери // Военный сборник. 1915. Т. 6. С. 59–74.
2. *Lanchester F.W.* Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm. London: Constable & Co. Ltd. 1916.
3. *Schaffer M.B.* Lanchester models of guerrilla engagements // Oper. Res. 1968. V. 16. P. 457–488.
4. *Fox W.P.* Discrete combat models: Investigating the solutions to discrete forms of Lanchester's combat models // Int. J. Oper. Res. Inf. Syst. 2010. V. 1. P. 16–34.
5. *Baik S.* A Raid-Type War-Game Model Based on a Discrete Multi-Weapon Lanchester's Law // Management Sci. Finan. Engineer. 2013. V. 19. P. 31.
6. *Laryushin I.D.* Advanced Lanchester Combat Model for Inhomogeneous Armies in RTS Games // IEEE Trans. Games. 2023. V. 15. P. 148–156.
7. *Stanescu M., Barriga N., Buro M.* Using Lanchester attrition laws for combat prediction in StarCraft // AAAI Conference on Artificial Intelligence and Interactive Digital Entertainment. 2015. V. 11. P. 86–92.
8. *Vinyals O., Babuschkin I., Czarnecki W. M., et al.* Grandmaster level in StarCraft II using multi-agent reinforcement learning // Nature. 2019. V. 575. P. 350–354.
9. *Zong Y., Lin L., Wang S., Cui Z., Chen Y.* Improvements and Challenges in StarCraft II Macro-Management A Study on the MSC Dataset // J. Theory Practic. Engineer. Sci. 2023. V. 3. P. 29–35.
10. *Xu J., Chen S., Zhang L., et al.* Lineup mining and balance analysis of auto battler // Proceedings of the 2020 International Conference on Aviation Safety and Information Technology. 2020. P. 169–176.
11. *Gong Y.J., Guo J.X., Lin D.L., et al.* Automated team assembly in mobile games: a data-driven evolutionary approach using a deep learning surrogate // IEEE Trans. Games. 2022. V. 15. P. 67–80.
12. *Ponomarenko A.A., Sirotkin D.V.* Dota Underlords game is NP-complete // arXiv preprint arXiv:2007.05020. 2020.
13. *Краснощечков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983.
14. *Keane T.* Combat modelling with partial differential equations // Appl. Math. Mod. 2011. V. 35. P. 2723–2735.
15. *Еремин А.А.* Использование “варгеймов” в исследовании международных отношений // МЭиМО. 2021. Т. 65. С. 90–100.
16. *Gentile G. et al.* Revisiting RAND's Russia Wargames After the Invasion of Ukraine. Santa Monica, CA: RAND, 2023.
17. *Cancian M.F., Cancian M., Heginbotham E.* The First Battle of the Next War: Wargaming a Chinese Invasion of Taiwan. Washington: Center for Strategic and International Studies, 2023.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галляевым.*

Поступила в редакцию 31.05.2024

После доработки 12.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### Тематический выпуск

<b>Васильев С.Н.</b> Вступительное слово к специальному выпуску по материалам XVI международной конференции “Управление развитием крупномасштабных систем” .....	3
<b>Ядыкин И.Б., Галяев И.А.</b> Структурные спектральные методы решения непрерывного обобщенного уравнения Ляпунова .....	7
<b>Горелов М.А., Ерешко Ф.И.</b> Иерархические игры и вычислительные процедуры в линейном случае .....	19
<b>Ахметзянов А.В., Самохин А.В.</b> Волновые и физико-химические методы управления разработкой нефтяных месторождений с аномальными запасами .....	39
<b>Цвиркун А.Д., Резчиков А.Ф., Дранко О.И., Кушников В.А., Богомолов А.С.</b> Оптимизационно-имитационный подход к определению критических комбинаций параметров компаний .....	53
<b>Цвиркун А.Д., Богомолов А.С., Дранко О.И., Кушников В.А., Поляков М.С., Резчиков А.Ф., Степановская И.А.</b> Модели системной динамики для управления дорожно-транспортной системой мегаполиса .....	65
<b>Ядыкин И.Б.</b> Спектральные разложения обратных матриц грамианов и энергетических метрик непрерывных динамических систем .....	80
<b>Хоботов Е.Н.</b> Модели выбора оборудования для модернизации предприятий с конвейерной сборкой изделий .....	108
<b>Сальников А.М., Батов А.В., Степанова И.Э., Гудкова Т.В.</b> О выборках данных спутниковых измерений для построения глобальной модели магнитного поля Марса .....	126
<b>Ларюшин И.Д., Колточенко Я.А.</b> Расширенная модель Ланчестера–Осипова для учета боевых единиц с однократным действием в стратегических компьютерных играх .....	144

## C O N T E N T S

### Topical issue

<b>Vasil'ev S.N.</b> Introduction to the special issue according to the XVI International Conference "Management of Large-scale Systems Development" .....	3
<b>Yadykin I.B., Galyaev I.A.</b> Structural Spectral Methods of Solving Continuous Generalized Lyapunov Equation .....	7
<b>Gorelov M.A., Ereshko F.A.</b> Hierarchical Games and Computational Procedures in the Linear Case.....	19
<b>Akhmetzyanov A.V., Samokhin A.V.</b> Wave and Physical-Chemical Methods for Managing the Development of Oil Fields with Anomal Reserves .....	39
<b>Tsvirkun A.D., Rezchikov A.F., Dranko O.I., Kushnikov V.A., Bogomolov A.S.</b> Optimization and simulation approach to determining critical combinations of company parameters.....	53
<b>Tsvirkun A.D., Bogomolov A.S., Dranko O.I., Kushnikov V.A., Polyakov M.S., Rezchikov A.F., Stepanovskaya I.A.</b> System Dynamics Models for the Control of the Road Transport System of a Metropolis .....	65
<b>Yadykin I.B.</b> Spectral Decompositions of Inverse Gramian Matrices and Energy Metrics of Continuous Dynamical Systems.....	80
<b>Khobotov E.N.</b> Models of Equipment Selection for Modernization Enterprises with Conveyor Assembly of Products .....	108
<b>Salnikov A.M., Batov A.V., Stepanova I.E., Gudkova T.V.</b> On Samples of Satellite Measurement Data for Constructing a Global Model of the Magnetic Field of Mars.....	126
<b>Laryushin I.D., Koltochenko Ya.A.</b> Extended Lanchester-Osipov Model for Accounting Combat Units with Single Burst Effect in Strategic Computer Games .....	144